RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 gennaio 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate.* Nota del Corrispondente O. Tedone.

1. In una Nota pubblicata in questi Rendiconti, nell'anno scorso (1), ho mostrato come si può pervenire a determinare l'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate col metodo delle caratteristiche, nella sua primitiva forma di Riemann-Volterra. Lasciando da parte il paragone fra i risultati precedenti e quelli che si otterrebbero applicando alla stessa equazione il metodo delle caratteristiche com'è stato modificato dall'Hadamard (2), che pure sarebbe certamente interessante a farsi, noterò che una espressione del sopraddetto integrale generale, analoga alla formola di Poisson per l'ordinaria equazione delle onde, si trova nel Riemann-Weber (3). Questa formola è dedotta, in quel libro, con artificio elegante dall'integrale generale della cosiddetta equazione dei telegrafisti, che non è altro se non la stessa equazione delle onde smorzate, pel caso di due variabili. Stante l'importanza innegabile dell'argomento, mi permetto di mostrare brevemente, in questa Nota, come dalla formola da me data si ottenga quella ricordata del Weber, anche per mettere in vista una nuova e notevole relazione integrale fra le funzioni di Bessel.

(1) Seduta 31 maggio 1913.
(2) Acta math., tom. 31, pag. 333.
(3) Part. Diff.-gleich. der math. Physik, 2er Bd., ediz. 1901, pag. 310.

2. L'equazione della propagazione delle onde smorzate, nella mia Nota citata, è stata considerata sotto la forma

$$(1) \qquad \Delta^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \varphi = 0,$$

alla quale si può sempre ridurre. E, indicando con x_1, y_1, z_1, t_1 le coordinate di un determinato punto nello spazio lineare (x, y, z, t) l'integrale generale della (1) è stato trovato sotto la forma

$$(2) \qquad \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\Phi + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t_1^2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Phi\,\frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\,dt,$$

dove

$$(3) \qquad \Phi = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma [\varphi \mathrm{D}\varphi' - \varphi' \mathrm{D}\varphi]\,d\Sigma,$$

Σ essendo la porzione di una varietà regolare, del resto, arbitraria, a tre dimensioni compresa nell'ipercono caratteristico uscente dal punto (x_1, y_1, z_1, t_1). È, inoltre, t_0 il valore di t nel punto comune a Σ ed alla parallela all'asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1),

$$\mathrm{D}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos nz - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos nt,$$

$$\varphi' = \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right)\frac{\mathrm{I}_1\left(\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}\right)}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}},$$

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

e, infine, è supposto t_1 più grande del valore che t assume nella porzione di Σ che compare nelle (2) e (3).

Per ottenere dalla (2) la formola del Weber, supporremo che Σ appartenga costantemente all'iperpiano $t = 0$. Bisognerà allora fare $t_0 = 0$ e porre $t = 0$ nell'espressione di φ'. Dobbiamo porre inoltre:

$$\mathrm{D}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \mathrm{D}\varphi' = -\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t_1}\right)_{t=0},$$

per cui

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial t_1} + \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} d\Sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{t_1} r^2\,dr \int_\Omega \left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial t_1} + \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} d\Omega,$$

Ω essendo la superficie di una sfera ordinaria di raggio uno dell'iperpiano $t = 0$ col centro nel punto (x_1, y_1, z_1).

Ponendo:

$$(4) \qquad \frac{r}{4\pi}\int_\Omega \varphi\, d\Omega = \psi(r) \quad , \quad \frac{r}{4\pi}\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, d\Omega = \Psi(r)\,,$$

possiamo anche scrivere

$$\Phi = \int_0^{t_1} r\, dr \left[\psi(r)\, \frac{\partial \varphi'}{\partial t_1} + \Psi(r)\, \varphi' \right]_{t=0} .$$

Di qui abbiamo:

$$2\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_1^2} = \psi'(t_1) + \Psi(t_1) + \frac{t_1}{2}\,\psi(t_1) + \\ + 2\int_0^{t_1} r\, dr \left[\psi(r)\, \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial t_1^3} + \Psi(r)\, \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t_1^2} \right]_{t=0} ,$$

ed anche

$$\int_0^{t_1} \Phi\, \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, dt = \int_0^{t_1} r\, dr \int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t} \left[\psi(r)\, \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \Psi(r)\, \varphi' \right] dt$$

con

$$\varphi' = \left(\frac{t}{r} - 1\right) \frac{\mathrm{I}_1\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\right) \mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right),$$

per cui

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_0^{t_1} \Phi\, \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, dt = \\ = \int_0^r r\, dr\, \frac{\partial}{\partial t_1} \int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t} \left[\psi(r)\, \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \Psi(r)\, \varphi' \right] dt .$$

Sostituendo questi risultati nella (2), e notando che

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right) \int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, \mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right) dt = r \int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, \varphi' dt ,$$

si ottiene

$$(5) \qquad \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) = \psi'(t_1) + \Psi(t_1) + \frac{t_1}{2}\,\psi(t_1) + \\ + \int_0^{t_1} dr \left[\psi(r)\, \frac{\partial}{\partial t_1} + \Psi(r) \right] \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right) \left[-\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2 - r^2}\right) + \right. \\ \left. + 2\,\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\, \mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2 - r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1} \int_r^{t_1} \frac{\mathrm{I}_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, \mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right) dt \right].$$

Avremo ottenuto la formola di Weber se potremo dimostrare che

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[-\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)+2\,\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial t_1}\int_r^{t_1}\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)dt\right]=-\frac{\partial}{\partial r}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right),$$

ossia, ricordando la relazione

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)=\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right),$$

che

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\int_r^{t_1}\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)dt\right]=0.$$

3. Mostreremo, a questo scopo, che sussiste l'identità

$$(6)\qquad \int_r^{t_1}\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)dt=\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right).$$

Cominciamo a far vedere che, ponendo:

$$(7)\qquad \mathrm{A}_{n,p}=\sum_0^p{}_m\,\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{n+p-2m}{p-m}=$$
$$=\sum_0^p{}_m\,\frac{1}{p-m+1}\binom{2p-2m}{p-m}\binom{n-p+2m}{m},$$

è pure

$$(8)\qquad \mathrm{A}_{n,p}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Si vede subito, infatti, che, fra le $\mathrm{A}_{n,p}$, sussiste la relazione

$$\mathrm{A}_{n+1,p}=\mathrm{A}_{n,p}+\mathrm{A}_{n,p-1}.$$

D'altra parte, nella mia Nota più volte citata, è stata dimostrata la (8) per $n=p$, e, immediatamente, si mostra che essa è giusta, qualunque sia n, per $p=0,1,2,\ldots$; essa dunque resta dimostrata in generale.

Ciò posto, notiamo che, dalle relazioni:

$$\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)=\sum_0^\infty{}_i\,\frac{(t^2-r^2)^i}{2^{2i}\,i!\,i!}\quad,\quad\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}=\sum_0^\infty{}_j\,\frac{(t_1-t)^{2j}}{2^{2j}\,j!\,(j+1)!},$$

abbiamo

$$\frac{\mathrm{I}_1(t_1-t)}{t_1-t}\,\mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right)=\sum_0^\infty{}_n\,\frac{1}{2^{2n}}\sum_0^n{}_m\,\frac{(t_1-t)^{2(n-m)}}{(n-m)!\,(n-m+\frac{1}{2}1)!}\,\frac{(t^2-r^2)^m}{m!\,m!}$$

e, quindi,

$$\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1-t)}{t_1-t} I_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right) dt =$$

$$= \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{2^{2n}} \sum_0^n{}_m \frac{1}{(n-m)!\,(n-m+1)!\,m!m!} \int_r^{t_1} (t_1-t)^{2(n-m)} (t^2-r^2)^m \, dt .$$

Ponendo, nell'integrale a secondo membro,

$$t_1 - t = (t_1 - r)\,\xi ,$$

subito si trova

$$\int_r^{t_1} (t_1-t)^{2(n-m)} (t^2-r^2)^m \, dt =$$

$$= (t_1-r)^{2n-m+1} \int_0^1 \xi^{2(n-m)} (1-\xi)^m \left[(t_1-r)(1-\xi) + 2r\right]^m d\xi =$$

$$= (t_1-r)^{n+1} \sum_0^m{}_h \frac{m!}{h!\,(m-h)!} \frac{(2n-2m)!\,(2m-h)!}{(2n-h+1)!} (2r)^h (t_1-r)^{n-h} .$$

Sostituendo, risulta

$$\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1-t)}{t_1-t} I_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right) dt =$$

$$= \sum_0^\infty{}_n \frac{(t_1-r)^{n+1}}{2^{2n}} \sum_h^n{}_h \frac{1}{h!\,(2n-h+1)!} (2r)^h (t_1-r)^{n-h} \times$$

$$\times \sum_h^n{}_m \frac{1}{n-m+1} \binom{2n-2m}{n-m} \binom{2m-h}{m} ;$$

e, per essere

$$\sum_h^n{}_m \frac{1}{n-m+1} \binom{2n-2m}{n-m} \binom{2m-h}{m} =$$

$$= \sum_0^{n-h}{}_m \frac{1}{n-h-m+1} \binom{2(n-h)-2m}{n-h-m} \binom{n-(n-h)+2m}{m} =$$

$$= \binom{2n-h+1}{m} ,$$

può scriversi

$$\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1-t)}{t_1-t} I_0\left(\sqrt{t^2-r^2}\right) dt =$$

$$= \sum_0^\infty{}_n \frac{(t_1-r)^{n+1}}{2^{2n}\,n!\,(n+1)!} \sum_0^n{}_h \frac{n!}{h!\,(n-h)!} (2r)^h (t_1-r)^{n-h} =$$

$$= (t_1-r) \sum_0^\infty{}_n \frac{(t_1^2-r^2)^n}{2^{2n}\,n!\,(n+1)!} = (t_1-r) \frac{I_0'\left(\sqrt{t_1^2-r^2}\right)}{\sqrt{t_1^2-r^2}} ;$$

il che dimostra completamente il nostro asserto.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali miste ed integro-differenziali.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

1. In un precedente lavoro (1) abbiamo ridotto il problema della risoluzione delle equazioni integro-differenziali allo studio delle equazioni integrali di tipo misto; cioè le

$$(1) \qquad \varphi(x) + \mu \int_0^\infty \mathrm{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x),$$

$$(2) \qquad \mu \int_0^\infty \mathrm{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x),$$

che diremo rispettivamente equazioni miste (o Volterra-Fredholm) di seconda e di prima specie; λ e μ sono diversi da zero.

Per trattare la (1), assumiamo l'incognita ausiliaria $\psi(x)$:

$$(3) \qquad \psi(x) = \varphi(x) + \mu \int_0^\infty \mathrm{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy.$$

Di qui si trae immediatamente:

$$(4) \qquad \varphi(x) = \psi(x) - \mu \int_0^\infty \mathfrak{M}(xy)\, \varphi(y)\, dy,$$

ove $\mathfrak{M}$ sia il nucleo risolvente di Volterra della (3), il quale dipende (come è noto) solo da M e μ.

Sostituendo, nella (1), sia la (3) per i primi due termini, sia la (4) pel terzo, si ha:

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy) \left\{ \psi(y) - \mu \int_0^y \mathfrak{M}(yz\mu)\, \psi(z)\, dz \right\} dy = f(x);$$

da cui, scambiando gli integrali nell'integrazione doppia, si ricava:

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \psi(y)\, dy - \lambda\mu \int_0^1 \psi(y)\, dy \cdot \int_y^1 \mathrm{M}_1(xz)\, \mathfrak{M}(zy)\, dz = f(x),$$

ossia:

$$(5) \qquad \psi(x) + \lambda \int_0^1 \mathrm{N}(xy)\, \psi(y)\, dy = f(x),$$

(1) *Sulle espressioni integro-differenziali.* Questi Rend., ser. V, vol. XXII, 2° semestre 1913, pp. 409-414.

in cui si è posto

$$N(xy) = M_1(xy) - \mu \int_y^1 M_1(xz)\,\mathfrak{M}(zy\mu)\,dz\,. \tag{6}$$

Dunque, la (1) è stata ricondotta, almeno formalmente per ora, ad un'equazione di Fredholm di seconda specie, mediante la soluzione d'una di seconda specie di Volterra.

Intanto, dalle (3), (4) si vede che, nel caso regolare, data la φ, la ψ esiste ed è unica; che, data la ψ, anche la φ esiste ed è unica; se una di esse è integrabile, lo è anche l'altra. Quindi il risultato ottenuto è valido.

2. Discutiamo adesso questa soluzione così ottenuta:

a) λ *non sia autovalore della* (5). Allora, per la teoria del Fredholm, la ψ esiste ed è unica; e dalla (4), formola di soluzione della (3), si ricava subito la φ; e si vede che anche essa è unica. Se $f(x) = 0$, si avrà $\psi(x) = 0$ e, quindi, $\varphi(x) = 0$.

b) λ *sia autovalore della* (5), *ed* $f(x) = 0$. Per la teoria del Fredholm, se λ è radice di multiplicità r, vi saranno per la ψ, al più, r valori linearmente indipendenti: sieno essi ϱ. Per le equazioni (4) che legano la φ e la ψ, si deducono ϱ soluzioni per la φ. Queste saranno anche esse linearmente indipendenti. Infatti, ove ciò non fosse, si dovrebbe avere:

$$a_1\varphi_1 + \cdots + a_\varrho\varphi_\varrho = 0\,;$$

per la (3), si avrebbe poi:

$$\psi_i = \varphi_i(x) + \lambda \int_0^\infty M(xy)\,\varphi_i(y)\,dy\,; \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

da cui:

$$\Sigma a_i\psi_i = \Sigma a_i\varphi_i + \lambda \int_0^\infty M(xy)\,\Sigma a_i\varphi_i(y)\,dy\,;$$

ovvero, tenuto conto della relazione che intercede fra le φ, si avrebbe

$$\Sigma a_i\psi_i = 0:$$

il che non è.

c) λ *sia autovalore della* (6) *ed* $f(x) \neq 0$. È ovvio che, se v'è una soluzione, ve ne saranno infinite, differenti fra loro per soluzioni dell'equazione omogenea corrispondente.

Ora, sempre per la teoria del Fredholm, condizione necessaria e sufficiente affinchè la (5) ammetta soluzioni, è che la f soddisfi a certe condizioni di ortogonalità. Se queste sono soddisfatte, vi sarà una soluzione ψ della (5), da cui si deduce poi la φ.

Ecco discusse le equazioni miste, in base alle teorie del Volterra e di Fredholm.

3. Si può anche discutere e studiare la (1), servendosi d'un altro procedimento. Poniamo $\mu = \lambda$; il che si può sempre fare, senza ledere la generalità, ponendo, ad es., $M = \frac{\lambda}{\mu} M'$; poniamo inoltre:

$$\left.\begin{matrix}\varphi(x) = \varphi_1(x) \\ f(x) = f_1(x)\end{matrix}\right\} x < 0 \ , \quad \left.\begin{matrix}\varphi = \varphi_2(x) \\ f = f_2(x)\end{matrix}\right\} 0 \leq x \leq 1 \ , \quad \left.\begin{matrix}\varphi = \varphi_3(x) \\ f = f_3(x)\end{matrix}\right\} 1 < x .$$

Introduciamo poi una funzione $W(xy)$ così definita:

$$\left.\begin{matrix}W(xy) = M(xy) & y \leq x \\ W(xy) = 0 & y > 0\end{matrix}\right\} 0 \leq x \leq 1 .$$

È evidente che con tali posizioni la (1) si scinde nelle tre seguenti:

$$(7) \quad \varphi_1(x) - \lambda \int_x^0 M(xy)\, \varphi_1(y)\, dy + \lambda \int_0^1 M_1(xy)\, \varphi_2(y)\, dy = f_1(x) \quad x < 0,$$

$$(8) \quad \varphi_2(x) + \lambda \int_0^1 [W(xy) + M_1(xy)]\, \varphi_2(y)\, dy = f_2(x) \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$(9) \quad \varphi_3(x) + \lambda \int_1^x M(xy)\, \varphi_3(y)\, dy + \lambda \int_0^1 [M(xy) + M_1(xy)]\, \mu_2(y)\, dy = f_3(x) \quad 1 < x .$$

Subito si noterà che, mentre la φ_2 figura ovunque, la φ_1 figura solo nella (7), e la φ_3 solo nella (9). Quindi converrà risolvere prima la (8). Essa non è altro che un'equazione di Fredholm, regolare, di seconda specie. Chiamando N la somma di W ed M_1, essa si scrive:

$$\varphi_2(x) + \lambda \int_0^1 N(xy)\, \varphi_2(y) = f_2(x) .$$

Ora, al solito, vi sono tre casi:

a) λ *non è autovalore.* Allora la φ_2 esiste, è unica ed è data da:

$$\varphi_2(x) = f_2(x) - \lambda \int_0^1 \frac{D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \lambda}{D(\lambda)} f_2(y)\, dy .$$

La φ_1 e la φ_2 ci sono fornite allora dalle equazioni regolari di Volterra, ricavate da (7) e (9):

$$(10) \quad \varphi_1(x) - \lambda \int_x^0 M(xy)\, \varphi_1(y)\, dy = \left[f_1(x) - \lambda \int_0^1 M_1(xy)\, \varphi_2(y)\, dy \right] \quad x < 0,$$

$$(11) \quad \varphi_3(x) + \lambda \int_1^x M(xy)\, \varphi_3(y)\, dy = \left[f_3(x) - \lambda \int_0^1 [M(xy) + M_1(xy)]\, \varphi_2(y)\, dy \right] \quad x > 1 .$$

Quindi, anche φ_1 e φ_3 esistono, e sono uniche. In particolare, se $f(x) = 0$, sarà anche $\varphi(x) = 0$.

b) λ *autovalore*, $f_2(x) = 0$ (equazione omogenea). Supposto λ autovalore, la (8), ove $f(x) = 0$, avrà r soluzioni linearmente indipendenti; da ciascuna di esse si ricava una φ_1 ed una φ_3 per mezzo delle (10), (11). In virtù di ciò, si vede che le diverse soluzioni sono esprimibili con combinazioni lineari di r soluzioni linearmente indipendenti.

c) λ *autovalore*, $f_2(x) \neq 0$. Allora: o la f_2 soddisfa a certe condizioni d'ortogonalità, e vi sono infinite soluzioni; o non vi soddisfa, e non vi sono soluzioni. Dire che la f_2 soddisfa a certe condizioni d'ortogonalità equivale a dire che la f le soddisfa pure, come è evidente.

4. Resta da trattare la (2), equazione mista di prima specie. Ma essa, seguendo il procedimento da me indicato altrove [1], si può ridurre ad equazione di prima specie del Fredholm.

Oppure, servendosi del metodo ora esposto, essa si può scindere nelle tre altre:

$$(12) \qquad -\lambda \int_x^0 \mathrm{M}(xy)\, \varphi_1(y)\, dy = \left[f_1(x) - \lambda \int_0^1 \mathrm{M}_1(xy)\, \varphi_2(y)\, dy \right] \quad x < 0,$$

$$(13) \qquad \lambda \int_0^1 [\mathrm{W}(xy) + \mathrm{M}_1(xy)]\, \varphi_2(y)\, dy = f_2(x) \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$(14) \qquad \lambda \int_1^x \mathrm{M}(xy)\, \varphi_3(y)\, dy = \left[f_3(x) - \lambda \int_0^1 [\mathrm{M}(xy) + \mathrm{M}_1(xy)]\, \varphi_2(y)\, dy \right] \quad x > 1,$$

di cui la (13) deve essere, come la (8), risolta dapprima.

5. Riassumendo i risultati ottenuti in questa e nella precedente Nota, possiamo dire:

I. *Le equazioni lineari integro-differenziali tipo Volterra di primo e secondo genere si riducono ad equazioni integrali dello stesso tipo e di seconda* (*o terza specie*).

II. *Quelle tipo Volterra di terzo genere, ad equazioni dello stesso tipo e di prima specie.*

III. *Quelle tipo Fredholm e miste di primo e secondo genere in generale ad equazioni integrali miste* (*in particolare di Fredholm*) *di seconda* (*o terza*) *specie.*

IV. *Quelle tipo Fredholm e miste di terzo genere, al tipo misto di prima specie.*

[1] *Sulle equazioni integrali*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, tom. XXXVII, 1° semestre 1914, pp. 72-109.

V. *Le equazioni integrali miste di seconda specie, si riducono alla soluzione successiva d'una integrale di Volterra o d'una di Fredholm, di seconda specie.*

VI. *Quelle di prima specie, ad equazioni di prima specie.*

Quindi, tutta la discussione delle integro-differenziali si può ricondurre, in modo semplice ed uniforme, alle teorie di Volterra e Fredholm.

Vi sarà quindi da attendersi l'esistenza di autovalori e di tutte le singolarità inerenti a tal caso; tratteremo in seguito qualche esempio.

Così, subito si vede che:

VII. *Le integro-differenziali tipo Volterra di primo e secondo genere sono sempre risolubili con sviluppi tipo Volterra.*

VIII. *Quelle dello stesso tipo, ma di terzo genere, sono soggette, per la risolubilità, a condizioni derivanti da quelle di risolubilità delle equazioni di Volterra di prima specie.*

Infine, se supponiamo di dover trattare una integro-differenziale lineare del Volterra, i cui nuclei sieno del tipo $F(xy)$: se cioè ci troviamo di fronte ad un problema ereditario (in cui la legge d'ereditarietà sia invariante attraverso il tempo), per quanto precede si vede che la sua riduzione ad equazione integrale di Volterra è esclusivamente operata con la composizione dei nuclei dati con le potenze $(x - s)^{\alpha}$.

E ricordando [1] che la composizione (secondo Volterra) di nuclei del *ciclo chiuso* (cioè funzioni di $x - s$) dà ancora nuclei dello stesso tipo, si può enunciare il teorema:

IX. *Ogni equazione lineare integro-differenziale di Volterra, i cui nuclei sieno del tipo* $F(x - s)$, *è riducibile ad un'equazione integrale di Volterra il cui nucleo è dello stesso tipo.*

Ovvero, in altre parole:

Le integro-differenziali lineari del ciclo chiuso si riducono ad equazioni integrali del ciclo chiuso.

E se l'equazione cui si giunge, è di seconda specie, si può subito dire che:

X. *La soluzione delle integro-differenziali del ciclo chiuso si effettua con operazioni dello stesso ciclo.*

[1] Volterra, *Leçons sur les éq. int. ed int.-diff.*, pp. 52 ecc.; 148; 150 ecc.

Matematica. — *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie.* Nota del dott. E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Efflusso da un recipiente forato lateralmente.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una precedente Nota (1) ebbi a considerare il problema dell'efflusso permanente di un liquido attraverso un foro piccolissimo, praticato nel mezzo del fondo di un recipiente a sezione rettangolare. Ponendomi ora in condizioni analoghe, mi propongo di studiare il caso in cui il foro B è scolpito su una parete laterale ad una altezza h sul fondo.

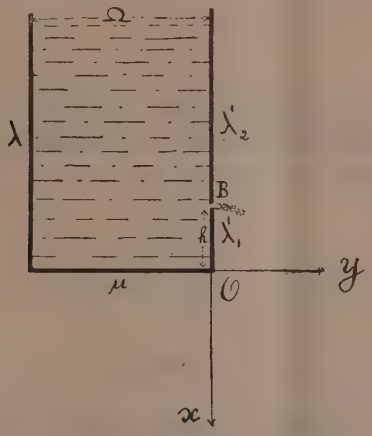


Fig. 1.

Ancor qui, come nel problema già studiato, si ha il regime uniforme in località abbastanza lontana dall'orifizio. Ma, come è ben naturale, quando il foro è scolpito su parte laterale, la quota discriminante N dipende, oltre che dalla larghezza Ω del recipiente, anche dall'altezza h del foro sul fondo; modo preciso basta assumere:

$$\frac{N}{\Omega} = 2 + \frac{5}{7} \log_{10} \cosh \frac{\pi h}{\Omega},$$

per essere lecito ritenere sensibilmente in regime uniforme il liquido che si trova nel recipiente ad una quota non inferiore ad N.

I. Assunta una coppia di assi Oxy, come è indicata in figura, si ha sul fondo μ: $x = 0$ e $-\Omega \leq y \leq 0$; sulle pareti λ' e λ: $y = 0$, $y = -\Omega$

(1) *Efflusso da un recipiente forato sul fondo* (Questi Rendiconti, vol. XVII, 23 novembre 1913, pp. 473-478).

e $x \leq 0$; mentre il foro B ha per coordinate $x = -h$, $y = 0$. Diciamo λ_1' e λ_2' i due tratti, limitato ed infinito, in cui rimane divisa λ' dal foro B.

Siano al solito u e v le componenti della velocità, φ e ψ il potenziale di velocità e la funzione di corrente, e facciamo le consuete posizioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} x + iy = z \ , \\ u - iv = w \ , \\ \varphi + i\psi = f \ . \end{cases}$$

Rammentiamo ancora che w ed f, funzioni di z, sono legate fra loro dalla relazione:

$$(2) \qquad \frac{df}{dz} = w \ .$$

La funzione $w(z)$ dev'essere regolare nel campo del moto, mentre sul contorno ed all'∞ la sua parte reale u, ed il coefficiente $-v$ dell'immaginario, devono soddisfare alle seguenti condizioni:

$$(3) \qquad \begin{cases} u = 0 \quad \text{sul fondo} \quad \mu \ , \\ v = 0 \quad \text{sulle pareti} \quad \lambda \ \text{e} \ \lambda' \ , \\ \lim\limits_{x=-\infty} u = \frac{q}{\Omega} \ , \ \lim\limits_{x=-\infty} v = 0 \ , \end{cases}$$

avendo indicato con q la portata (costante) dell'efflusso, ed avendo ammesso che la densità costante del liquido sia $= 1$.

Anche la funzione $f(z)$ dev'essere regolare entro il campo del moto, e la sua parte immaginaria $i\psi$ deve assumere valori costanti sul contorno. Se si attribuisce a ψ la determinazione che gli compete assumendo $\psi = 0$ in O, si dovrà avere

$$(4) \qquad \begin{cases} \psi = 0 \ , \quad \text{sopra} \ \lambda \ , \mu \ , \lambda_1' \ , \\ \psi = q \ , \quad \text{sopra} \ \lambda_2' \ . \end{cases}$$

2. Converrà operare un cambiamento di variabile, il quale permetta di rappresentare il campo del moto in un semipiano. Designi ζ la nuova variabile complessa; vogliamo legare ζ a z mediante una relazione che permetta di rappresentare il campo del moto nel semipiano ζ di ordinate positive, in guisa che al contorno del campo z corrisponda l'asse reale del piano ζ, e precisamente λ, μ, λ_1', λ_2' vengano rappresentati rispettivamente dai tratti: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \zeta')$, $(\zeta', +\infty)$ dell'asse reale, il foro B avendo per corrispondente nel piano ζ il punto $\zeta' \geq 1$.

La teoria della rappresentazione conforme ci assicura la esistenza di una relazione tra z e ζ, la quale realizza l'accennato cambiamento di variabile. Prima di determinarla è lecito quindi sfruttarne l'esistenza.

Si considerino allora w ed f come funzioni della nuova variabile ζ nel semipiano ausiliare, esse vi devono essere regolari al finito e di più, a norma delle (3) e (4), si dovrà avere:

$$(3') \qquad \begin{cases} u = 0 & \text{per} \quad 0 \leq \zeta \leq 1\,, \\ v = 0 & \text{per} \quad -\infty \leq \zeta \leq 0\ .\ 1 \leq \zeta \leq +\infty\,. \\ w = \dfrac{q}{\Omega} & \text{all'}\,\infty\,; \end{cases}$$

$$(4') \qquad \begin{cases} \psi = 0 & \text{per} \quad -\infty \leq \zeta \leq \zeta'\,, \\ \psi = q & \text{per} \quad \zeta' \leq \zeta \leq +\infty\,, \end{cases}$$

3. Facilmente si accerta che tutte qneste condizioni sono soddisfatte, ponendo:

$$(5) \qquad w = \frac{q}{\Omega}\frac{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}{\zeta-\zeta'}\,,$$

$$(6) \qquad f = iq - \frac{q}{\pi}\log(\zeta-\zeta')\,,$$

avendo adottato pel radicale $\sqrt{\zeta(\zeta-1)}$ la determinazione che è positiva per ζ reale e >1. Per queste, la (2) dà luogo a:

$$dz = \frac{1}{w}\,df = \frac{1}{w}\frac{df}{d\zeta}\,d\zeta = -\frac{\Omega}{\pi}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}\,,$$

dalla quale, integrando e tenendo presente che a $\zeta = 1$ deve corrispondere $z = 0$, si ricava la relazione;

$$(7) \qquad z = -\frac{\Omega}{\pi}\int_1^{\zeta}\frac{d\xi}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} = \frac{\Omega}{\pi}\log\left\{2\left[\zeta - \sqrt{\zeta(\zeta-1)}\right] - 1\right\},$$

che è appunto quella che deve legare le variabili z e ζ nelle circostanze supposte.

4. Le (5) e (6) dànno w ed f in funzione di ζ; ci converrà esprimere le stesse funzioni per z. A tal uopo risolviamo la (7) rispetto a ζ. Per raggiungere l'intento nel modo più spiccio, scriviamo la (7) nel modo seguente:

$$(7') \qquad \zeta - \sqrt{\zeta(\zeta-1)} = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{\frac{\pi z}{\Omega}}\right\}.$$

e notiamo che la identità

$$\left\{\zeta + \sqrt{\zeta(\zeta-1)}\right\}\left\{\zeta - \sqrt{\zeta(\zeta-1)}\right\} = \zeta\,,$$

permette, per la precedente, di scrivere:

$$\zeta + \sqrt{\zeta(\zeta-1)} = \frac{2\zeta}{1+e^{\frac{\pi z}{\Omega}}}\,. \tag{7''}$$

La eliminazione del radicale tra (7') e (7'') dà luogo ad una relazione lineare in ζ, che risoluta rispetto a ζ stessa dà infine l'espressione semplice:

$$\zeta = \cosh^2 \frac{\pi z}{2\Omega}\,. \tag{8}$$

Abbiamo chiamato ζ' il punto corrispondente a $z = -h$. Per la (8) avremo:

$$\zeta' = \cosh^2 \frac{\pi h}{2\Omega}\,. \tag{9}$$

Ora possiamo dare le espressioni definitive di w e di f in termini di z. Tenute presenti le (8) e (9), le (5) e (6) diventano infatti (1):

$$w = -\frac{q}{2\Omega}\,\frac{\operatorname{senh}\frac{\pi z}{\Omega}}{\cosh^2\frac{\pi z}{2\Omega} - \cosh^2\frac{\pi h}{2\Omega}}\,, \tag{10}$$

$$f = iq - \frac{q}{\pi}\log\left\{\cosh^2\frac{\pi z}{2\Omega} - \cosh^2\frac{\pi h}{2\Omega}\right\}. \tag{11}$$

5. Per $h = 0$, essendo $\cosh\frac{\pi h}{2\Omega} = 1$, le precedenti divengono rispettivamente:

$$w = -\frac{q}{\Omega}\coth\frac{\pi z}{2\Omega}\,, \tag{10'}$$

$$f = iq - \frac{2q}{\pi}\log\operatorname{senh}\frac{\pi z}{2\Omega}\,. \tag{11'}$$

Queste relazioni coincidono (salvo la inessenziale costante additiva iq e il

(1) Nel fare le debite riduzioni per arrivare all'espressione di w, si tenga presente che per $z = -\infty$ dev'essere $w = \frac{q}{\Omega}$.

cambiamento di q e di Ω in $2q$ e 2Ω) colle (5) e (7) della Nota citata [1]. La coincidenza non è occasionale, anzi era prevedibile *a priori*, se si pensa che per $h = 0$ il foro è sul fondo e che è lecita *la riflessione* rispetto all'asse reale: si ha allora l'efflusso permanente di portata $2q$, da un recipiente largo 2Ω e forato nel mezzo del fondo.

6. Supponiamo $h > 0$, e ricaviamo da (11) le equazioni $\psi =$ costante, dei filetti liquidi. Si ottiene

$$(12) \qquad \psi = q - \frac{q}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi y}{\Omega}}{\coth \frac{\pi x}{\Omega} \cos \frac{\pi y}{\Omega} - \frac{\cosh \frac{\pi h}{\Omega}}{\operatorname{senh} \frac{\pi x}{\Omega}}} .$$

Sappiamo già che se $h = 0$, cioè quando il foro è scolpito sul fondo, il regime è sensibilmente uniforme per $x \leq -2\Omega$ [2]. Proponiamoci ora di determinare un numero $N \geq 2\Omega$ tale che anche per $h > 0$ si possa ritenere il regime uniforme quando $x \leq -N$.

Poichè $e^{-\pi} = 0.04....$, avremo

$$0 \leq e^{\frac{\pi x}{\Omega}} \leq e^{-\frac{\pi N}{\Omega}} = (0.04.. ..)^{\frac{N}{\Omega}} ,$$

per $x \leq -N$. Ne segue che per tali valori di x,

$$-\frac{1}{\operatorname{senh} \frac{\pi x}{\Omega}} = \frac{2e^{\frac{\pi x}{\Omega}}}{1 - e^{\frac{2\pi x}{\Omega}}} ,$$

sarà compreso tra 0 e $\dfrac{2e^{-\frac{\pi N}{\Omega}}}{1 - e^{-\frac{2\pi N}{\Omega}}} = \dfrac{2(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}}}{1 - (0.04...)^{\frac{2N}{\Omega}}}$; anzi poichè per $N \geq 2\Omega$ è

$$(0.04...)^{\frac{2N}{\Omega}} \leq (0.04...)^4 = 0.000002... ,$$

[1] Nella (7) rilevo un errore tipografico: invece di $\frac{q}{\Omega}$ si deve leggere $\frac{q}{\pi}$. Durante la correzione delle bozze ho avuto occasione di leggere il recentissimo trattato di idrodinamica di Ramsey [*A Treatise on Hydrodynamics*, Part II; London, Bell, 1913] in cui a pag. 124 trovasi definita, a meno della costante iq, la formula (11′).

[2] Cfr. la Nota citata.

si può ritenere senz'altro che $-\dfrac{1}{\operatorname{senh}\dfrac{\pi x}{\Omega}}$ sia compreso tra 0 e $2(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}}$.

Dopo ciò siamo autorizzati a scrivere la seguente limitazione:

$$(13) \qquad 0 \leq -\frac{\cosh\dfrac{\pi h}{\Omega}}{\operatorname{senh}\dfrac{\pi x}{\Omega}} \leq 2(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}} \cosh\frac{\pi h}{\Omega}, \qquad (x \leq -N).$$

D'altra parte per $x \leq -N \leq -2\Omega$, è con grande approssimazione (1)

$$\coth\frac{\pi x}{\Omega} = -1.$$

Ciò posto, se si assume N in guisa che $-\dfrac{\cosh\dfrac{\pi h}{\Omega}}{\operatorname{senh}\dfrac{\pi x}{h}}$ sia trascurabile, la (12) diviene:

$$(14) \qquad \psi = q + \frac{q}{\Omega} y,$$

dalla quale si desume che per $x \leq -N$ le linee di flusso sono a ritenersi parallele alle pareti, ed il regime uniforme.

Ora, avuto riguardo alla (13), se si assume N in guisa che la quantità $2(0.04...)^{\frac{N}{\Omega}} \cosh\dfrac{\pi h}{\Omega}$ sia dell'ordine dei millesimi, ad es. ponendo

$$(15) \qquad (0.04...)^{\frac{N}{\Omega}} \cosh\frac{\pi h}{\Omega} = 0.001,$$

siamo fatti certi che per un tale N e per $x \leq -N$ vale la (14), con molta approssimazione.

Da (15) ricavando $\dfrac{N}{\Omega}$ si ha, prendendo, per maggior comodità di calcolo, i logaritmi volgari, ed arrotondando lievemente le cifre:

$$(16) \qquad \frac{N}{\Omega} = 2 + \frac{5}{7}\log_{10}\cosh\frac{\pi h}{\Omega}.$$

(1) Cfr. la Nota citata.

7. Nel caso particolare in cui il recipiente diviene infinitamente largo è $\Omega = \infty$, allora con un passaggio al limite, si ricava da (10) senza difficoltà:

$$w = \frac{2q}{\pi} \frac{z}{h^2 - z^2}. \tag{17}$$

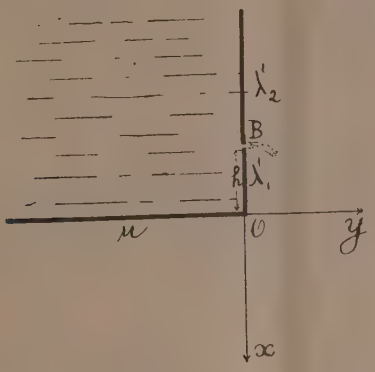


Fig. 2.

È facile ora esaurire la discussione, una volta in possesso dell'integrale (17) del movimento della massa liquida.

Meccanica. — *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame.* Nota I del dott. ing. Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio V. Volterra.

Matematica. — *Sur certaines équations intégrales.* Nota di J. Soula, presentata dal Socio V. Volterra.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Geometria. — *Sulla equivalenza per traslazione.* Nota del prof. G. Vacca, presentata dal Socio V. Volterra.

Grazie ad alcune osservazioni del prof. Eugenio Elia Levi, posso esporre per una via più semplice e più breve gli stessi risultati contenuti nella Nota del 9 novembre 1913 (vol. XXII, pag. 417), e togliere la condizione restrittiva che allora era occorsa nelle dimostrazioni.

Aggiungerò in fine la estensione ai poliedri della *equivalenza per traslazione*, chiamando, per brevità, *equivalenti per traslazione* due poligoni rettilinei in uno stesso piano, ovvero due poliedri rispettivamente, quando si possono decomporre in un numero finito di poligoni, ovvero di poliedri, parziali, sovrapponibili per traslazione.

1. Dato un insieme di vettori, si può considerare una nuova specie di somma, che chiameremo *somma orientata* dell'insieme. Essa coincide con la somma ordinaria, soltanto se i vettori considerati hanno la stessa direzione, ma se non l'hanno, la somma orientata dei vettori è il complesso dei vettori che si ottengono, dopo aver eseguito tutte le possibili somme di vettori aventi la stessa direzione, ed appartenenti all'insieme considerato.

L'operazione di *somma orientata*, eseguita sopra un insieme di vettori, riproduce quindi un insieme di vettori (che può ridursi talvolta ad un vettore unico, od anche essere nulla).

2. Si ha allora il teorema [1]:

Perchè due dati poligoni di egual area, nello stesso piano, siano decomponibili in un numero finito di parti eguali per traslazione, è necessario che sia eguale la somma orientata dei vettori dei lati dei due poligoni, quando questi lati siano immaginati percorsi nello stesso senso.

Infatti, immaginata possibile, ed eseguita, la decomposizione dei due poligoni dati, ed immaginati tutti i contorni dei poligoni parziali, percorsi nello stesso senso, in ognuna delle due decomposizioni, sarà nulla la somma dei vettori dei lati interni ai due poligoni dati, poichè ogni lato di un poligono parziale è percorso in due versi opposti, secondo che lo si consideri come appartenente all'uno o all'altro dei due poligoni parziali adiacenti. Quindi la somma orientata dei vettori di tutti i lati di tutti i poligoni parziali (immaginati tutti percorsi nello stesso senso per ogni poligono), in ciascuna delle due decomposizioni, si riduce a quella dei vettori dei lati dei due poligoni dati; c. v. d.

3. Quindi è possibile, applicando questo teorema, decomporre due parallelogrammi equivalenti in un numero finito di parti eguali per traslazione,

[1] È questo il teorema comunicatomi, sotto altra forma, dal prof. Levi.

perchè la somma orientata dei vettori dei lati di qualsivoglia parallelogrammo è nulla.

È invece impossibile il decomporre in tal modo un triangolo ed il suo simmetrico rispetto al vertice, perchè, immaginandoli entrambi percorsi nello stesso verso, la somma orientata dei vettori dei lati dell'uno non è nulla, ed è essenzialmente diversa (anzi l'opposta) da quella dell'altro [1].

4. Possiamo ora estendere allo spazio queste considerazioni, osservando che ai lati di un poligono corrispondono, in certo modo, le faccie di un poliedro.

Converrà dapprima, dato un poliedro, distinguere per ogni sua faccia il verso, che sarà quello della normale interna al poliedro, ed attribuire poi ad ogni faccia un segno, in modo tale che due faccie parallele, ma di verso opposto, abbiano segno contrario. Ciò può farsi ad arbitrio. Per fissar le idee, supporremo positive le faccie tali che la loro normale interna faccia un angolo acuto con una direzione fissa; negative quelle che fanno un angolo ottuso, ecc.

Potremo allora considerare un certo ente, che chiameremo *somma orientata* delle faccie di uno o più poliedri, il quale coincide coll'insieme delle faccie stesse, col loro segno, quando nell'insieme non vi siano faccie parallele. Ma quando esso contiene più faccie parallele, ad esse sostituiremo un poligono avente la stessa giacitura ed avente per area la somma algebrica delle aree delle faccie parallele, considerate col loro segno.

Così, ad esempio, la somma orientata delle faccie di un parallelepipedo è sempre nulla.

5. Abbiamo allora il teorema:

Condizione necessaria affinchè due poliedri di egual volume siano decomponibili in poliedri parziali eguali per traslazione, è che sia eguale la somma orientata delle loro faccie.

Infatti, immaginata possibile, ed eseguita, in ciascuno dei due poliedri, la decomposizione in poliedri parziali, la somma orientata di tutte le faccie di tutti i poliedri parziali, in ciascuno dei due poliedri dati, si riduce a quella delle faccie del poliedro totale, essendo nulla quella delle faccie (o parti di faccie) comuni a due poliedri parziali adiacenti. c. v. d.

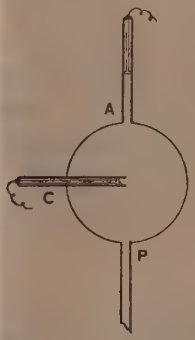
Applicando questo teorema, si vede che, mentre è possibile di decomporre in un numero finito di parti eguali per traslazione due parallelepipedi, è invece impossibile di far ciò per due piramidi simmetriche rispetto alla base; ecc.

[1] Con lo stesso metodo il prof. Levi ha altresì osservato che due pentagoni simmetrici non sono equivalenti per traslazione, ecc.

Fisica. — *Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: effetto longitudinale.* Nota di ANTONINO LO SURDO, presentata dal Socio A. RÒITI.

Nella Nota precedente (1) comunicavo alcune esperienze, con le quali la scomposizione di alcune righe spettrali dell'idrogeno, nella regione precatodica, scomposizione considerata come effetto del campo elettrico, veniva osservata secondo una direzione visuale perpendicolare al campo stesso.

La riga H_γ risultava scomposta in cinque elementi, con polarizzazione rettilinea, aventi i due esterni il piano di vibrazione parallelo, e i tre interni perpendicolare al campo.



Era da aspettarsi che, ove fosse riuscito di osservare la luce secondo una linea visuale parallela al campo elettrico, i due primi elementi necessariamente sarebbero mancati e gli altri tre sarebbero stati ancora osservabili. Per quanto tale osservazione presentasse speciali difficoltà, pure mi è parso che la mia disposizione potesse permettere di superarle; infatti sono riuscito ad ottenere alcuni resultati abbastanza chiari per formarne oggetto della presente Nota.

Ho sperimentato in due modi diversi. Nelle prime esperienze un palloncino di vetro, poco fusibile, porta saldate tre tubulature, di cui la P serve per mantenere l'idrogeno alla pressione opportuna coi soliti mezzi, la A porta saldato l'anodo, rivolto in basso, e la C, che penetra fino in prossimità del centro, regge il catodo in forma di disco, con la sua superficie a circa 5 mm. dall'estremo.

(1) Pervenuta alla R. Accademia nella seduta del 21 dicembre 1913.

In un tubo di tal forma, con una rarefazione opportuna, la luce anodica rimane nella tubulatura A; la luce negativa costituente il terzo strato secondo Hittorf è diffusa a cono nell'interno del palloncino, ed è assai poco intensa. Di modo che la parte più splendente viene ad essere costituita dalla luminosità dello strato immediatamente avanti al catodo.

L'asse del tubo C coincideva approssimativamente con quello del collimatore dello spettrografo; una lente convergente projettava su la fenditura di questo la detta luminosità precatodica, che era circondata da una debole aureola. Tra la lente e il palloncino poteva inserirsi un prisma birifrangente, il quale all'unica imagine sostituiva due imagini distinte una dall'altra, ma sempre allineate su la fenditura; e avanti al prisma si poteva mettere ancora una lamina di mica $^1/_4$ d'onda per una delle righe studiate.

Tale disposizione si presentava molto vantaggiosa quando non si volesse spingere troppo la rarefazione, poichè in quest'ultimo caso il riscaldamento intenso e concentrato, prodotto dai raggi catodici su la parete del tubo, ne cagionava la rottura.

Adottai quindi, in una seconda serie di esperienze, un'altra disposizione, che consisteva semplicemente nell'usare uno degli stessi tubi che avevano servito per l'osservazione trasversale, inclinato di un piccolo angolo su l'asse del collimatore, e facendo in modo che su la fenditura cadesse la projezione della sola luminosità precatodica.

Ho fatto diverse fotografie, nelle quali si osserva, secondo le previsioni, per la H_γ una tripla, che devesi considerare come originata dalle stesse oscillazioni che producono la tripla interna nell'effetto trasversale. Per assicurarmene, ho eseguito due prove con uno stesso tubo e con uguale caduta di potenziale, intensità di corrente e lunghezza dello spazio precatodico, ed ho trovato che la tripla osservata trasversalmente, e quella osservata longitudinalmente, comprendono lo stesso intervallo.

C'era da aspettarsi che nelle osservazioni longitudinali l'effetto Doppler dei raggi positivi diretti e retrogradi, cioè del movimento di una parte dei centri di emissione verso il catodo o nel verso contrario, potesse complicare il fenomeno in istudio, tanto più che l'ordine di grandezza degli spostamenti risulterebbe lo stesso. Ma la coincidenza avanti accennata, e la circostanza che le righe spostate per effetto Doppler nei gas rarefatti sono sempre molto sfumate e accompagnate da una più forte riga proveniente dai vibratori fermi, fanno concludere che colle durate di esposizione da me adoperate, le quali davano per la H_γ impressioni assai leggiere, lo spettrogramma di questa riga non fosse notevolmente perturbato da effetto Doppler.

Invece, questo sembra essere la causa di un'aureola diffusa, alquanto oscura nei negativi, la quale per ora offusca la $H\beta$, e che probabilmente si potrà eliminare abbreviando opportunamente la esposizione e variando la dispersione.

Gli apparecchi di polarizzazione che erano stati inseriti solo per il sospetto che vi potesse essere una polarizzazione circolare, parendomi che il campo presentasse una sufficiente dissimmetria, non hanno modificato sensibilmente gli spettrogrammi.

Fisica. — *Su l'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman: le varie righe di Bauner presentano diverse forme di scomposizione.* Nota di Antonino Lo Surdo, presentata dal Corrispondente A. Garbasso.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Dispositivo herziano per osservazioni meteorologiche e previsioni di temporali.* Nota di A. Tosi, presentata dal Socio E. Millosevich.

Un'antenna radiotelegrafica, un trasformatore di Tesla ad essa opportunamente collegato ad un *detector* riunito ad un telefono, questi ultimi applicati al trasformatore, costituiscono i principali apparati che permettono di accertare la presenza di onde herziane emesse da una stazione a portata dell'antenna. L'impiego ordinario di tali apparati è quello delle segnalazioni a distanza, la ricezione cioè di radiotelegrammi, consistente nell'assieme di rumori brevi e lunghi uditi nel telefono del *detector*: rumori che corrispondono ai punti e alle linee coi quali si formano le lettere e, quindi, le parole secondo l'alfabeto Morse.

Questi rumori che si manifestano nel telefono del *detector*, sono generati, nel caso generale, allorchè delle onde herziane, dovute a scariche oscillanti artificialmente, prodotte in una stazione, vengono a colpire l'antenna; ed i rumori brevi o lunghi corrispondono a scariche brevi o lunghe, create a volontà dall'operatore.

Il tòno dei rumori uditi nel telefono dipende dalla frequenza, dai *periodi* dell'alternatore che si impiega per ottenere la scarica oscillante alla stazione trasmettente; di modo che, variando i periodi degli apparati generatori di onde herziane, varierà il tòno del rumore al telefono ricevitore, e potremo ottenere in esso una nota musicale, se la stazione trasmettente impiegherà un alternatore a un tale numero di periodi che diano le vibrazioni corrispondenti a quelle che occorrono per dare una nota musicale.

Ricordiamo che il *do* più grave del violoncello, che corrisponde a quello più basso di un piano a sei ottave, fa 66 vibrazioni al secondo. Questa Nota, che si otterrebbe da un alternatore a 33 periodi, sarebbe troppo bassa; e, siccome, per contraddistinguere le stazioni l'una dall'altra e per essere

sicuri di ricevere al telefono del *detector* i segnali herziani in qualsiasi condizione atmosferica, si è riconosciuta l'utilità di impiegare note musicali *alte*, così gli alternatori per onde herziane si fanno a partire da un numero di periodi che dia il *la* del *diapson*, il *la* della 4ª ottava del piano, e più in su. Ricordando che le vibrazioni di questo *la* sono circa 880, e che circa 1000 sono le vibrazioni del *si* della 4ª ottava del piano, un tipo comunissimo di alternatore radiotelegrafico è quello a 500 periodi, che dà un bellissimo si_3 al telefono. Alternatori a 1000 periodi dànno il *si* dell'ottava sopra (si_4) molto acuto.

Un semplice dispositivo permette di variare le oscillazioni prodotte dallo stesso alternatore: e quindi, volendo, una stazione può generare varie note musicali; fino a riuscire a far sentire a centinaia di chilometri, senza filo, sui telefoni degli apparati ricevitori, una melodia, semplice sì, ma intonatissima.

Mentre l'uomo può creare delle scariche oscillanti e farle variare entro limiti estesissimi, ottenendo come conseguenza una vibrazione dell'antenna e la ricezione di note musicali qualsiansi al telefono del *detector*, la natura ci fornisce delle scariche oscillanti le quali fanno egualmente vibrare la antenna e che egualmente producono dei rumori nel telefono del *detector*. Queste scariche sono quelle elettriche atmosferiche, visibili od invisibili, le quali però sono a bassa frequenza; e la loro presenza è manifestata, al telefono del *detector*, con un rumore sempre molto grave, completamente diverso da quello della nota musicale radiotelegrafica. Di conseguenza, se una stazione radiotelegrafica riceve un radiotelegramma mentre l'atmosfera è carica di elettricità, si udiranno contemporaneamente, al telefono, rumori di tonalità completamente diversa i quali si percepiranno distintamente gli uni dagli altri. Se quindi una stazione meteorologica è munita di un'antenna e di un apparato ricevente radiotelegrafici, l'osservatore sarà sempre in grado di conoscere, anche in condizioni di tempo apparentemente calmo, se l'atmosfera è carica o no di elettricità, e così avere segni precursori di prossimi uragani.

Però l'antenna ordinaria ad irradiazione circolare, usata in radiotelegrafia, non risolve esaurientemente il problema, giacchè essa percepisce uniformemente le scariche da qualsiasi punto esse provengano; il che fa sì che il telefono del *detector* ci accuserà la presenza di scariche atmosferiche, senza però poterci dire la *direzione* in cui esse si manifestino, mentre la conoscenza di ciò è di somma importanza per gli scopi meterologici.

Ad ottenere tale *desideratum*, si presta in modo pratico ed esatto un semplice dispositivo basato sull'impiego, nelle stazioni meteorologiche, di una antenna a circuito oscillante chiuso, di forma poligonale qualsiasi, contenuta in un piano verticale: antenna dirigibile, la quale, come si sa, ha la proprietà di oscillare al massimo, secondo il suo piano, e nulla rigorosamente

nel piano perpendicolare. Questa antenna speciale, convenientemente unita al *detector* dà quindi ricezione o ricezione massima al telefono allorchè essa è orientata nella direzione da cui provengono le scariche, mentre nessun rumore è percepito al telefono quando è orientata nella direzione perpendicolare; in altre parole, messo il telefono all'orecchio, facendo lentamente rotare l'antenna fino ad avere ricezione o ricezione massima, l'orientazione dell'antenna che dà tale ricezione indicherà la direzione da cui provengono le scariche atmosferiche.

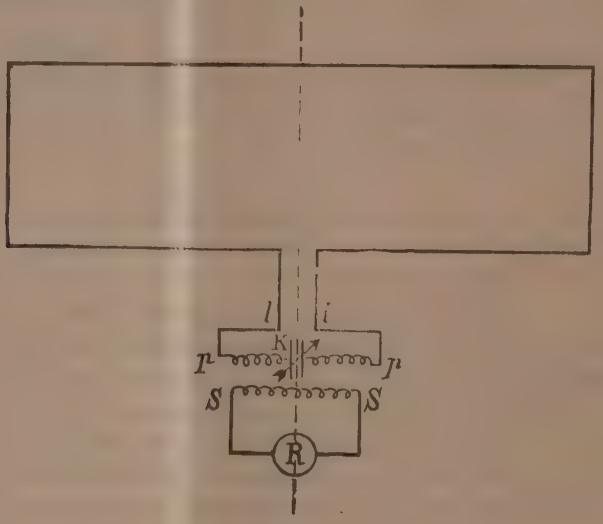


Fig. 1.

Il dispositivo più semplice è dato da un'antenna costituita da un conduttore di rame piegato a forma di rettangolo, giacente in un piano verticale, isolato, reso rigido in modo che possa rotare attorno alla mediana (fig. 1). Gli estremi $l\,l$ di tale antenna sono fissati agli estremi $p\,p$ del primario di un trasformatore mediante uno speciale contatto, a mercurio o di altro tipo, che permetta la rotazione degli estremi dell'antenna; il primario del trasformatore è interrotto al centro da un condensatore variabile K. Al secondario SS del trasformatore sono collegati i soliti apparati di ricezione telefonica, il cui complesso si indica con R.

Se quest'antenna, girevole attorno al suo asse, viene rigidamente collegata, debitamente isolata, all'apparato rotante che serve ad indicare la direzione del vento, l'osservatore, notando l'orientazione dell'antenna e mettendo il telefono all'orecchio, conoscerà la direzione del vento e la presenza di scariche atmosferiche in quel piano, se ve ne sono (1).

(1) Il dispositivo può essere, naturalmente, anche indipendente dal mostravento.

L'antenna rotante, di cui sopra, non può avere grandi dimensioni; ma, data la potenza delle scariche oscillanti atmosferiche, anche in scala limitata tale antenna permetterà di conoscere l'esistenza di scariche atmosferiche a distanze rilevanti, quando esse non sono percettibili nè all'occhio nè allo orecchio dell'osservatore.

Se poi l'osservatorio deve essere munito di un dispositivo il quale possa far conoscere a centinaia di chilometri la presenza e la direzione di scariche atmosferiche, allora la sistemazione da usarsi è la seguente:

Tenendo presente che, nella pratica, quello che occorre è la conoscenza o la previsione di venti o di temporali dai quattro punti cardinali e dai quattro intercardinali, in luogo di un'unica antenna mobile attorno al suo asse, se ne sistemeranno quattro fisse, come ora viene indicato: Le quattro antenne ognuna costituita da un filo di rame di una forma poligonale qualsiasi, sono tutte rigorosamente eguali l'una all'altra, contenute ognuna in un piano verticale, angolarmente equidistanti, simmetriche ognuna rispetto all'asse verticale che le divide in due parti e i quattro assi di simmetria si confondono in uno solo. Per quanto precede, dando ad ogni antenna la forma p. es. di un triangolo o di un rettangolo, il complesso delle quattro, isolate l'una dall'altra, formerà le costole di una piramide retta o di un prisma retto a base ottagonale. Le quattro antenne sono orientate nei piani N-S, E-W, NE-SW, NW-SE. Il primario di un trasformatore, interrotto al centro da un condensatore, ha i suoi estremi fissati su una coppia di contatti, diametralmente opposti, che possono rotare nel senso dell'*azimut*; questa coppia di contatti scorre a dolce frizione sulle coppie di estremi delle antenne, in modo tale che una sola antenna per volta possa essere unita al primario del trasformatore. Il secondario del trasformatore è identico a quello precedentemente indicato.

Ciò posto, per riconoscere se vi sono scariche atmosferiche ed in quale direzione, l'osservatore metterà il telefono all'orecchio e farà rotare il contatto mobile del primario del trasformatore sulle coppie di estremi delle antenne fino a percepire rumori o i massimi al telefono. L'orientamento della antenna che, a contatto col primario, ha permesso la ricezione dei rumori al telefono, indicherà la direzione da cui provengono le scariche.

Nei due tipi di dispositivi descritti, un commutatore che permette di mettere a terra separatamente l'uno o l'altro estremo del primario del trasformatore, isolando contemporaneamente l'estremo di antenna unito all'estremo del primario messo a terra, farà conoscere il senso da cui provengono le scariche; giacchè le antenne a circuito chiuso irradiando nel loro *piano*, vi sarebbe eguale ricezione al telefono tanto se le scariche venissero da N, quanto se venissero da S, p. es., e vi sarebbe il dubbio, senza il commutatore anzidetto. La differenza di suono nel telefono, a seconda che è isolato l'estremo anteriore o quello posteriore dell'antenna, permette di conoscere il

senso delle scariche; avendosi suono più forte allorchè è isolato l'estremo opposto al senso delle scariche.

I dispositivi descritti, semplici come parte aerea e come istrumenti herziani, sono poco ingombranti e di poco costo. Essi rappresentano la riunione di cose note formanti un tutto che risolve un problema nuovo e di grande importanza per la meteorologia, quale è quello di conoscere con molto anticipo l'approssimarsi di temporali e la loro provenienza; il che non permettono sempre di conoscere i mezzi di cui finora dispongono gli osservatori meteorologici.

Ben lieto se questa mia Nota porterà ad una installazione di prova in un osservatorio, mi metto a disposizione per collaborare alla sistemazione del dispositivo per la migliore riuscita.

Chimica-fisica. — *La tensione superficiale e l'idratazione in soluzione* (1). Nota di M. Padoa e G. Tabellini, presentata dal Socio G. Ciamician.

La questione dell'associazione fra solvente e corpo sciolto, per quanto sia stata attaccata con mezzi varî, può dirsi ancora controversa, almeno dal punto di vista quantitativo. Mendelejeff (2) ammise che le molecole *intere* potessero dare un certo numero di idrati, ben definiti, ed in generale con poche molecole d'acqua. Appena sorta la teoria della dissociazione elettrolitica, Ciamician (3) ebbe primo l'idea della idratazione degli ioni, che, come egli dice, doveva sorgere quasi come conseguenza della teoria della dissociazione.

Nei tempi più recenti, fra i più caldi fautori di una teoria degli idrati, troviamo Washburn, l'Armstrong e collaboratori, e soprattutto il Jones (4) che vede nelle deviazioni dalle leggi delle soluzioni diluite, nelle anomalie dell'assorbimento della luce, ed in altri fenomeni, altrettante prove rigorose dell'idratazione di molecole e ioni sciolti, non solo, ma vuol trarne deduzioni quantitative, calcolando il numero di molecole d'acqua combinate nei varî *solvati*. Non occorre dire che questi risultati quantitativi variano assai secondo il metodo seguìto; così mentre Jones (5) trova, in base ai punti di congelamento, che in una soluzione circa $^1/_4$ molecolare di bromuro di litio ogni

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Zeitschr. für Physik. Chemie (1887), I, 273.

(3) Questi Rendiconti, 1891, I, 16.

(4) Vedi ad es. Am. Chem. Journal, *23*, 89 (1900) (Jones e Chambers); Jones, Journal de Chimie Physique (1905), 455; (1912), 217.

(5) Journal de Chimie Physique (1903), 489.

molecola del sale è associata con 17,8 molecole d'acqua. Riesenfeld e Reinhold (1) da misure della mobilità degli ioni e di numeri di trasporto trovano che, a diluizione infinita, ogni ione litio trasporta 150 a 158 molecole d'acqua ed ogni ione bromo 20, talchè ogni grammimolecola dissociata dovrebbe assumere circa 170 molecole d'acqua. Neppure la considerazione che i dati del Jones si riferiscono ad una soluzione non diluitissima, bastano a giustificare l'enorme diversità dei risultati; si consideri del resto che alla concentrazione detta, il sale è dissociato per $^3/_4$ e quindi non molto lontano dalla condizione limite. Si noti ancora che secondo il Jones l'idratazione in soluzione talvolta aumenta e talvolta diminuisce coll'aumentare della concentrazione, e talvolta ancora presenta un massimo ad una certa concentrazione, mentre secondo Riesenfeld e Reinhold l'idratazione massima si ha sempre a diluizione infinita. Ma forse la grande diversità dei risultati ha in parte la sua ragione nella natura stessa del fenomeno per la grande instabilità dei complessi idrati, e forse non vi ha un altro ordine di fatti in cui si debba rimanere maggiormente incerti fra la qualità fisica o chimica dell'attrazione esercitata fra le molecole del solvente e quelle del corpo sciolto. Certamente l'esistenza di sali cristallizzati con un numero più o meno grande di molecole d'acqua parla in favore dell'esistenza di veri composti anche in soluzione, almeno per ciò che riguarda alcune delle molecole di solvente congiunte a quelle disciolte. Se però si considera che la stabilità di molti composti (corpi racemici, composti fra metalli ecc.) è quasi completamente legata allo stato solido, viene fatto di pensare che nelle soluzioni il numero di molecole di solvente così combinate non debba essere tanto grande come certi calcoli potrebbero far credere. Il fatto che gli ioni nel migrare attraverso il solvente ne possano trascinare una forte quantità, non sembra costituire una prova che tutte le molecole di solvente trascinate siano veramente combinate.

Un'altra questione strettamente connessa a quella degli idrati in soluzione è la seguente: in qual misura il potere d'idratazione competa alle molecole intere ed agli ioni. Nessuno può dubitare che l'idratazione sia possibile in entrambi; ma sembrerebbe che i più volessero ammettere che la tendenza a combinarsi col solvente fosse maggiore per gli ioni. Tuttavia vi sono certe esperienze le quali farebbero piuttosto pensare, secondo il nostro avviso, ad un potere d'idratazione uguale: il colore delle soluzioni di cloruro e bromuro di rame e di cobalto (2) non varia sensibilmente coll'ag-

(1) Zeitschrift für Physik. Chemie (1909), *66*, 672.

(2) Lewis, Zeitschrift für Physik. Chemie, *52* (1905), 224; *56* (1906), 223. Vedi anche Washburn, *Hydrates in solution* (1909), *66*, 513. Che il colore delle soluzioni non abbia a che fare con la ionizzazione, almeno nella più parte dei casi, come voleva Ostwald, lo ha fatto notare per primo Magnanini (Gazz. Chim. ital., 1893; vedi anche Mem. R. Acc. Scienze Modena, 1912). Ciò è stato confermato poi in modo esauriente dai recenti lavori di Hantzsch (vedi ad es., Berichte, 1911, 44, 1783).

giunta di sali contenenti rispettivamente ione cloro e ione bromo; varia invece se il corpo aggiunto è avido d'acqua, e ciò indipendentemente dalla qualità e dal grado di ionizzazione. Le variazioni di colore sono dunque dovute almeno in gran parte a variazioni nel grado d'idratazione, e su quest'ultima, come sul colore, non avrà dunque influenza la retrocessione della dissociazione prodotta da un eccesso di un ione comune.

Finalmente, di un'altra proprietà dei solventi non ci sembra abbiano tenuto conto tutti gli autori che si sono occupati di questo argomento: e cioè dell'associazione. Non può negarsi che la polimerizzazione del solvente possa avere un'influenza nelle sue relazioni col corpo sciolto, e ciò, sia che si consideri la questione dal punto di vista della mole dei complessi formati, sia che si voglia indagare l'origine delle variazioni di contenuto di energia durante la soluzione. Ora il solvente più comune, l'acqua, è indubbiamente polimerizzato; e ci sembra, in accordo in questo con H. E. Armstrong (1), che le molecole del corpo che si scioglie, per combinarsi con l'acqua, debbano prima di tutto depolimerizzarla; avvenuto ciò, non è detto che non si possano formare anche dei grossi complessi, ma intanto bisogna por mente al fatto, che se si considera, ad esempio, l'acqua in condizioni usuali come costituita in media da complessi $(H_2O)_3$ per arrivare nelle soluzioni ad un *grado d'associazione medio* uguale a quello del solvente puro, bisogna che ogni molecola o ione del corpo sciolto assuma qualche molecola semplice d'acqua.

Misure di tensione superficiale sopra delle soluzioni acquose sono state fatte in precedenza da Quincke (2), Traube (3), Buliginsky (4) ed altri; sopra miscele di acqua ed alcool sperimentò Grunmach (5) e sopra soluzioni saline in alcool Cederberg (6). Inoltre Whatmough (7) determinò il valore della tensione superficiale in molte miscele binarie. Le costanti di Eotvös vennero determinate per soluzioni acquose di cloruri, solfati e nitrati da Grabowski e Paun secondo i quali il grado di associazione non varia nel processo di soluzione; altre determinazioni sono dovute a Zemplèn (8) secondo il quale devesi tener conto della dissociazione dei sali sciolti. Più interessanti per noi sono alcune misure di Linebarger (9) sopra soluzioni acquose di acido solforico, dalle quali l'A. conclude che si ha forte associazione.

(1) Chemical News, *39*, 28.
(2) Poggendorf Ann., *160*, 565 (1877).
(3) Journal f. Prakt. Chemie, *31*, 197 (1885).
(4) Poggendorf. Ann., *134*, 440.
(5) Annalen d. Physik, *38*, 1018.
(6) Journal de Chimie Physique, 1911, 3.
(7) Zeitschrift für Physik. Chemie *39*, 129.
(8) Ann. d. Physik. *20*, 873, *22*, 390.
(9) Centralblatt 1900, I, 580.

Il metodo di misura da noi adottato è quello di Morgan e Higgins [1] che ha dato buoni risultati anche a M. Padoa e F. Bovini [2] nelle misure riguardanti i racemi liquidi ed i relativi componenti attivi, che vennero poi confermate perfettamente da altre misure compiute, forse nello stesso tempo, e certamente senza sapere delle nostre, da Duncan Mitchell e Clarence Smith [3] sulle medesime sostanze, col metodo dell'ascensione capillare.

Il metodo Morgan consiste nella determinazione del peso delle goccie che si staccano dall'estremità di un tubo di vetro di forma e dimensioni opportune. In realtà si misura, per mezzo di un lungo capillare preventivamente tarato, il volume di ogni goccia, e, per mezzo della densità data da un picnometro, il peso delle goccie. Tutto l'apparecchio deve essere chiuso ed immerso in un termostato, che in questo caso sarà un grande recipiente di vetro. L'agitazione dell'acqua si può fare con un molinello ad aria calda; noi abbiamo anche pensato di sospendere il molinello sopra il recipiente per mezzo di scatole a sfere come si usano per le biciclette, e ciò per evitare l'ingombro di un albero che discenda in fondo al recipiente ed il pericolo che il peso possa romperlo.

Dopo aver costruito un apparecchio adatto con un tubo d'efflusso del diametro esterno di circa mm. 6, abbiamo verificato il suo funzionamento sopra un liquido a comportamento conosciuto, cioè il benzolo. I risultati sono i seguenti:

Temperatura	Lunghezza del capillare corrispondente a 1 goccia (mm.)	Peso della goccia mg.	K
20°	35,5	31,169	2,68
30	34,5	29,592	2,61
40	33,5	28,078	

Da questi si calcola una costante media K = 2,64 che corrisponde molto bene al valore di Morgan [4] K = 2,57.

Ciò posto siamo passati al solvente che più c'interessava, l'acqua:

Temperatura	Lunghezza del capillare corrispondente a 1 goccia	Peso della goccia mg.	K
20°	77,4	77,262	1,42
30	76,3	75,064	1,32
40	75,3	72,984	1,33
50	74,3	70,847	

(1) Zeitschrift für Physik. Chemie, *64*, 170.
(2) Vedi F. Bovini, *Sull'esistenza dei racemi allo stato liquido*, tesi di laurea (1912).
(3) Journal of the Chemical Society (1913), 489.
(4) Zeitschrift für Physik. Chemie, *63*, 163.

Il valore medio è $K = 1,35$; esso è soddisfacente se si considera che per mezzo dell'ascensione capillare altri autori dànno un valore medio di 1,12, e che i valori ottenuti con le goccie sono sempre un po' più elevati di quelli ottenuti con l'altro metodo.

In seguito noi abbiamo eseguito delle misure sopra soluzioni mono- e triplomolecolari di cloruro ammonico; con soluzioni monomolecolari di cloruro di cobalto; con soluzioni monomolecolari di bromuro di sodio; con soluzioni monomolecolari di cloruro di magnesia e finalmente con soluzioni mono-, bi- e triplomolecolari di acido cloridrico (1). I risultati ottenuti sono i seguenti:

	Temperatura	Lunghezza del capillare corrispondente a 1 goccia	Peso delle goccie in mg.	K
I	20°	80,0	83,632	
	30	79,3	81,848	1,27
NH_4Cl	40	78,5	80,004	1,25
sol. N.	50	77,8	78,282	1,21
II	20	79,9	81,194	
	30	78,3	78,542	1,80
NH_4Cl	40	76,7	75,975	1,76
sol. 3 N.	50	75,2	73,519	1,67
III	30	78,5	86,180	
	40	77,3	83,846	1,71
$CoCl_2$	50	76,1	81,522	1,71
sol. N.				
IV	30	79,4	83,128	
	40	78,3	80,869	1,50
NaBr	50	77,3	78,712	1,44
sol. N.				
V	30	23,0	80,362	
	40	21,4	78,045	1,65
$MgCl_2$	50	20,8	75,769	1,62
sol. N.				
VI	30	23,5	80,884	
	40	23,0	79,059	1,20
HCl	50	22,5	77,277	1,17
sol. N.				
	30	23,0	80,444	
HCl	40	22,7	79,342	0,73
sol. 2 N.	50	22,3	77,932	0,93
	30	22,4	79,828	
HCl	40	22,1	78,690	0,73
sol. 3 N.	50	21,8	77,590	0,72

(1) Si noti che non potemmo ottenere, per cause non determinate, risultati costanti con soluzioni 2 N e 4 N di NH_4Cl; con soluzioni $\frac{1}{2}$ N, 2 N, 3 N di $CoCl_2$, con soluzioni 2 N di NaBr ed $MgCl_2$, con soluzioni di HCl oltre il triplonormale. Così pure non si prestarono alle misure il cloruro d'alluminio, l'allume, gli acidi bromidrico e iodidrico.

I gruppi V e VI di misure furono eseguiti con un apparecchio diverso da quello impiegato in precedenza. Ogni dato è la media di molte misure.

Il valore della costante K è calcolato mediante la formula

$$K = \frac{p\left(\frac{M}{d}\right)^{\frac{2}{3}} - p_1\left(\frac{M}{d_1}\right)^{\frac{2}{3}}}{t_1 - t}$$

dove p e p_1 sono i pesi delle goccie (1) alle temperature t e t_1, d e d_1 sono le densità delle soluzioni a quelle stesse temperature, ed M il *peso molecolare medio* del liquido. Solitamente, trattandosi di un solvente puro, M sarebbe il peso molecolare del solvente stesso, $\frac{M}{d}$ ed il volume ed $\left(\frac{M}{d_1}\right)^{\frac{2}{3}}$ la superficie molecolare. Noi abbiamo creduto lecito estendere il concetto di superficie molecolare anche ad una miscela liquida, e perciò in luogo del peso molecolare del solvente abbiamo introdotto il peso molecolare medio, ottenuto prendendo in considerazione i numeri di molecole e le grandezze molecolari del solvente e del corpo sciolto.

Si noti però che questa variazione non implica, per soluzioni poco concentrate come le nostre (nei riguardi dei rapporti molecolari), che piccole differenze nei valori di K; e se si volesse obbiettare che la superficie di una soluzione potrebbe essere costituita da puro solvente, si può mostrare facilmante che mantenendo ad M il valore del solvente, K varia assai poco; così nel gruppo I scenderebbe soltanto da 1,24 a 1,155 (2). Ed ora veniamo a considerare i risultati; nel gruppo I abbiamo per soluzioni monomolecolari una costante leggermente superiore a quella dell'acqua, e per soluzioni trimolecolari una costante leggermente inferiore, ciò che starebbe ad indicare che nel primo caso sarebbero combinate poche molecole d'acqua, e che la associazione si farebbe più sensibile nelle soluzioni triplomolecolari, così da formare complessi di mole un po' maggiore di quelli dell'acqua pura.

Nei gruppi II, III e IV abbiamo ottenuti con soluzioni monomolecolari valori di K leggermente più alti di quelli dell'acqua, ciò che starebbe ad indicare una limitata associazione fra solvente e corpo sciolto, per quanto

(1) Si noti che il peso delle goccie indica direttamente il valore relativo della tensione superficiale, riferendosi naturalmente ad un medesimo apparecchio di deflusso; essa ci risulta, come ai precedenti sperimentatori, superiore per le soluzioni rispetto al solvente puro.

(2) Guye, in una recente pubblicazione [Journal de Chimie Physique (1911), 505], sostiene che non si può dar fede alle misure della tensione superficiale nei riguardi della costituzione *interna* di un liquido; in altri termini, un composto che può esistere all'interno, potrebbe non esistere, secondo Guye, alla superficie, o viceversa. Noi crediamo che per giudicare su tale questione occorrano degli studî piezochimici; in ogni caso sarà sempre interessante accertare lo stato molecolare alla superficie dei liquidi.

riesca difficile comprendere da qual causa provengano gli aumenti nei valori di K rispetto all'acqua.

I migliori risultati, secondo il nostro avviso, li abbiamo ottenuti nel gruppo V con soluzioni di acido cloridrico; risultati che crediamo ci autorizzino a dare alle misure di tensione superficiale il valore di un criterio, almeno qualitativo, per giudicare della quantità di solvente combinata al soluto. È indubitato che l'acido cloridrico si combina con l'acqua: la sua grande solubilità l'innalzamento del punto d'ebullizione rispetto all'acqua, l'assenza di proprietà acide in soluzioni non acquose, ne sono altrettante prove. Ora ciò è rivelato chiaramente anche dai valori di K che per soluzioni normali sono di 1,17 a 1,20, per soluzioni doppio normali variano da 0,73 a 0.93 e per soluzioni triplonormali da 0,72 a 0,73. Per quanto noi sappiamo, non sono mai state trovate per altri liquidi, costanti così basse, che indicano fortissima associazione. Dalla diminuzione, prima rapida, poi più lenta dei valori di K sembra si possa arguire che nelle soluzioni triplo normali il massimo dell'associazione è quasi raggiunto; si noti che il rapporto molecolare corrispondente è per soluzioni normali 1 HCl : 54.3 H_2O; per soluzioni doppio normali 2 HCl : 53,2 H_2O; e per soluzioni triplo normali 3 HCl : 52.2 H_2O.

Le presenti esperienze non ci hanno dato risultati esaurienti, sia perchè non tutte le sostanze prese in esame si prestavano a misure con questo metodo, sia ancora perchè le misure stesse non potevano estendersi entro larghi limiti di concentrazioni. Tuttavia ci sembra che i dati esposti sieno tali da rendere abbastanza promettente un'estensione delle ricerche in questo senso.

Chimica fisica. — *Solubilità e attività.* Nota di G. Pellini e A. Coppola, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Calori di combustione di sostanze fototrope.* Nota di M. Padoa e B. Foresti [1], presentata dal Corrispondente G. Ciamician.

Per l'incertezza che regna tuttora sulla natura delle trasformazioni fototropiche, non ci è dato di fare *a priori* previsioni sulle variazioni del contenuto di energia che potrebbero verificarsi durante tali trasformazioni; tuttavia, la prontezza con la quale la luce provoca le modificazioni di colore, in parecchie sostanze sensibili, faceva pensare che il lavoro eseguito in queste trasformazioni dovesse essere minimo.

Poichè per ispiegare la fototropia sembra si debba ricorrere a fenomeni di polimerizzazione o di isomerizzazione, è bene citare alcuni degli esempî più importanti in cui sono state osservate delle differenze nei calori di combustione. Così, per un gr. delle seguenti sostanze sono stati ottenuti i seguenti sviluppi di calore [2]:

	calcolato	differenza
Alcool propilico	8311	89
Alcool isopropilico	8222	
Metilnitrile	7613	157
Metilisonitrile	7770	
Azossibenzolo	7725	106
p-Ossiazobenzolo	7619	
Eugenolo	7840	54
Isoeugenolo	7786	
α-Ionone	9551	22
β-Ionone	9573	
Nitrito di etile	4456	50
Nitroetano	4506	
Etere α-formilfenilacetico	6868,3	16,4
Etere β-formilfenilacetico	6851,9	

Circa l'etere formilfenilacetico [3], bisogna osservare che la forma α è liquida, mentre la β è solida: e quindi, per confrontare i due dati termici, occorre aggiungere al calore di combustione di quest'ultima il relativo calore di fusione. Questo non è ancora noto: ma, osservando che, fra i corpi orga-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.
[2] Phys. Chem. Tabellen Landolt. Bornstein, 1912. Si tratta di piccole calorie.
[3] Wislicenus, Liebigs Ann. *291*, 147 (1896).

nici, quello che ha il calore di fusione minimo è il bibromoetilene (calorie 13,2 per grammo), mentre tutti gli altri presentano calori di fusione molto più elevati, e cioè circa 30 cal. come valore medio, non saremo lontani dalla realtà aggiungendo 30 cal. al calore di combustione della forma β, che è 6851,9; in tutto, sarebbero cal. 6881,9, e cioè 13,6 in più rispetto alla forma α.

Più interessante per noi, dato il risultato di alcune esperienze eseguite in questo laboratorio [1] sulla velocità di trasformazione di sostanze fototrope, è il considerare calori di combustione dell'antracene e del diantracene che, come è noto, possono costituire un equilibrio fotochimico [2]. F. Weigert [3] ha trovato per il primo cal. 9541, e pel secondo 9500: la differenza è piccola, considerando anche l'elevatezza di questi calori di combustione.

Per ciò che riguarda le sostanze fototrope è noto che si è tentato, invano finora, di osservare un'emissione di radiazioni durante il processo di scoloramento.

Noi ci siamo dunque proposti di misurare direttamente il valore relativo del contenuto d'energia in sostanze fototrope, prima e dopo l'esposizione alla luce, eseguita a mezzo della bomba calorimetrica. L'apparecchio da noi adoperato era una bomba di Mahler con rivestimento in platino iridiato; la determinazione del valore in acqua del calorimetro venne fatta bruciando zucchero ed acido benzoico purissimi, ed i risultati da noi ottenuti sono i seguenti:

Acido benzoico (cal. 6325,4)		Saccarosio (cal. 3952)	
	330,9		333,3
	335,2		332,7
	333,2		336,0
Valore medio	333,2	Valore medio	334,0

La media generale ci dà, per l'equivalente in acqua, il valore 333.6.

In tutte le nostre misure tenemmo conto: *a*) del calore di combustione del filo di ferro che serviva per l'accensione; *b*) della quantità di calore svolta nella formazione di acido nitrico (cal. 227 per g.) dall'ossigeno e dall'azoto sempre contenutovi, o proveniente dalle sostanze azotate che venivano bruciate; *c*) degli scambî di calore che avvengono con l'esterno, servendoci della formula di Regnault-Pfaundler che venne usata da F. Stohmann e C. Elaber [4] nelle loro misure sotto la forma:

$$\Sigma \Delta t = \frac{v - v_1}{\tau_1 - \tau} \left(\sum^{n-1} \delta v + \frac{\delta_n + \delta_1}{2} - n\tau \right) - (n - 1)\, v .$$

(1) M. Padoa e Teresa Minganti. Questi Rendiconti, 1913, II, 500.

(2) Luther e Weigert, Zeitschrift für physikalische Chemie, 1905 (*51*), 297.

(3) Zeitschrift für Physik. Chemie, *63*, 458.

(4) Journal für prakt. Chemie [1889] 518.

$\Sigma \Delta t$ sarebbe la quantità di calore irraggiato, che viene poi addizionata allo sviluppo osservato nel calorimetro; v è la media differenza di temperatura per ogni minuto delle osservazioni preliminari: v_1 è la stessa grandezza per le osservazioni finali; τ è la media temperatura delle prime; τ_1 è la media temperatura per le seconde; n è il numero delle letture termometriche dell'osservazione principale; e δ_1, δ_n sono le temperature relative.

Le letture termometriche dell'osservazione preliminare non si cominciavano a fare se non quando il termometro segnava incrementi di temperatura di un millesimo di grado circa, uguali per ogni minuto. Per avere questo lento innalzamento della temperatura dell'acqua del calorimetro, occorreva che quella del recipiente esterno si trovasse ad una temperatura superiore di un grado circa.

I. Fra le sostanze fototrope ci preoccupammo di scegliere quelle che presumibilmente potevano ottenersi allo stato *puro* nella forma colorata, e che non retrocedevano con velocità tale da non consentire l'esecuzione delle misure. Prima fra queste è indubbiamente la saliciliden-β-naftilamina che può ottenersi a mezzo dei solventi nelle due forme e che ha già servito ultimamente per le citate misure di velocità di trasformazione. Per garantirci che la sostanza fosse esente da impurità, siamo partiti da aldeide salicilica e naftilamina purissime, e le abbiamo fatte combinare in quantità perfettamente equivalenti; quest'ultima precauzione è necessaria soprattutto per ottenere la forma rossa, poichè questa non può venire ricristalizzata a scanso di vederla trasformarsi nella forma gialla; del resto, per ottenerla pura, nelle condizioni predette, è sufficiente di lasciare soggiornare a lungo la sostanza sotto alcool, avendo cura di tenere bene rimescolato il prodotto della reazione; quando il colore ha assunto la sua intensità massima, si filtra e si lava più volte con alcool. Per entrambe le modificazioni avevamo il punto di fusione a 125°.

I risultati ottenuti nelle combustioni furono i seguenti [1]:

Forma gialla	Forma rossa
cal. 8290,0	cal. 8291,0
» 8280,0	» 8311,9
» 8291,2	» 8278,9
» 8305,4	» 8295,8
Valore medio: cal. 8291,5	Valore medio: cal. 8294,4

La differenza è di sole calorie 2,9.

II. Dato questo risultato, rimaneva da vedere se una sostanza fototropa d'altro tipo si sarebbe comportata similmente: finora non sono note altre sostanze di cui si possano isolare le due modificazioni, come per la prece-

[1] I nostri dati si riferiscono tutti a calori di combustione a volume costante.

dente: siamo allora ricorsi al fenilidrazone della benzaldeide (opportunamente purificato), che può essere colorato alla luce in modo per noi praticamente stabile. Ecco i risultati termici che da esso abbiamo ottenuti:

Forma stabile all'oscuro	Forma stabile alla luce
cal. 8674,2	cal. 8663,4
» 8661,2	» 8654,9
» 8664,8	» 8661,0
» 8663,4	» 8665,4
» 8676,4	» 8687,0
» 8673,4	» 8683,0
Valore medio: cal. 8668,8	Valore medio: cal. 8669,1

Anche qui la differenza è minima: 0,3 calorie. Queste differenze sono imputabili ad errori di misura, i quali, per quante precauzioni si prendano, sono sempre superiori assai alle differenze da noi ottenute; per citare un parere autorevole in proposito, ricordiamo che il Nernst [1] non ritiene sicura neppure la differenza, riscontrata dagli autori, di 57 cal. per grammo fra l'acido maleico ed il fumarico, per quanto ammetta che, per un medesimo sperimentatore, l'errore possa essere ridotto. Comunque sia, è certo che oggigiorno i chimici si trovano di fronte a trasformazioni di cui il valore energetico non è apprezzabile coi mezzi di misura, ancora grossolani di cui disponiamo: e così probabilmente avverrà per le numerose sostanze cromoisomere che oggi si conoscono.

Cristallografia. — *Bournonite della miniera di Brosso* (Piemonte) [2]. Nota di E. Grill, presentata dal Corrispondente Federico Millosevich.

Debbo alla squisita e ben nota cortesia del capitano Alberto Pelloux, appassionato collezionista e valente mineralogo, al quale esprimo anche qui tutta la mia viva riconoscenza, l'aver potuto studiare alcuni buoni cristalli di bournonite, provenienti dalla miniera di Brosso e raccolti dal Pelloux stesso in una faglia del cantiere Fortune.

In Italia, com'è noto, la bournonite in distinti cristalli è piuttosto rara. Finora è stata trovata solo in alcune poche località: A val di Castello (Pietrasanta) [vedi, A. D'Achiardi, Boll. R. Comm. geol. ital., pag. 164 (1871); Mineralogia della Toscana, II, pag. 335 (1873); U. Panichi, Rend.

(1) Theoretische Chemie, VII ediz. (1913), 632.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia di Firenze.

R. Accad. d. Lincei, vol. XIX, pag. 690 (1910)]; al Sarrabus (Sardegna) [vedi, F. Millosevich, Rend. R. Accad. d. Lincei, vol. XV, pag. 457 (1906)]; quindi mi è sembrato non privo d'interesse il far conoscere la paragenesi e l'abito dei cristalli di questa nuova località.

È anche noto che in Piemonte la bournonite in stato cristallino venne trovata già da parecchio tempo in diversi luoghi (vedi G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia*: *regione delle Alpi*, 1873): a Gravere (Val di Susa), insieme con galena; a Ceresole Reale, con tetraedrite; a Testa della Deserta e Sutore presso Noasca (Val Locana), con pirite e tetraedrite; ad Antey St. Andrè (Val Tournanche), con calcopirite e galena; e ancora, sempre secondo Jervis, a Brosso, con pirite e calcopirite.

La bournonite di questa ultima località, mandatami dal Pelloux, si presenta sopra una ganga di quarzo ove è accompagnata, oltrechè da pirite e calcopirite, anche da cristalletti di quarzo, galena, mesitina e dolomite. La maggior parte di essa è in masserelle cristalline, con lucentezza sub-metallica alquanto iridescente; in veri e proprî cristalli d'una lucentezza metallica vivissima si trova soltanto in alcuni punti, meno compatti, della ganga quarzosa.

I cristalli sono relativamente piccòli, con la maggior dimensione per lo più inferiore ai 2 mm.; e si presentano con un abito generalmente tozzo, alquanto irregolare e complesso. Tale complessità è dovuta alla associazione di due o più individui uniti parallelamente fra loro oppure in geminazione, nonchè alla distorsione delle facce. Anche nei singoli individui l'abito non è mai tabulare, conservando esso in tutti una tendenza più o meno marcata alla forma prismatica quasi isodiametrica o con una maggior dimensione secondo l'asse [*z*].

Le forme osservate sono le seguenti 18:

a{100}	*m*{110}	*o*{101}	*n*{011}	*y*{111}
b{010}	*e*{210}	*x*{102}		*u*{112}
c{001}	*l*{320}			*g*{221}
	f{120}			*v*{211}
	ϑ{430}			*θ*{212}
	K{540}			*ϱ*{121}

Relativamente ai cristalli di bournonite italiana, quelli di Brosso risultano, fino ad oggi, i più ricchi di forme. Infatti al Sarrabus (loc. cit.) ne furono osservate 9, cioè: *a*, *b*, *c*, *m*, *l*, *n*, *y*, *u*, *ϱ*; e a Val di Castello (loc. cit.) 14, cioè: *a*, *b*, *c*, *m*, *e*, *f*, *ϑ*, *ω*, *o*, *x*, *n*, *y*, *u*, *s*; tra le quali la piramide *s*{212} e il prisma verticale *ω*{340}, non trovate, per ora, nè al Sarrabus, nè a Brosso.

Delle combinazioni, riporto solo le seguenti, poichè vennero osservate su cristalli semplici:

1°) *a c m y o u x* ϑ,

2°) *y c o a m e l u v*,

3°) *o n b u a e l m* K ϑ *f y*.

Le forme vi sono ordinate secondo il loro sviluppo decrescente, e quindi si può subito constatare che il pinacoide *c*{001} non è mai la forma dominante. Manca perciò l'abito tabulare vero e proprio, così ben marcato invece per i cristalli dei giacimenti di Val di Castello e del Sarrabus. Nella 3ª combinazione, detto pinacoide non esiste, e il cristallo ove fu osservato è depresso e quasi come appiattito (vedi fig. 1) secondo le facce di *o*{101} e di *n*{011}.

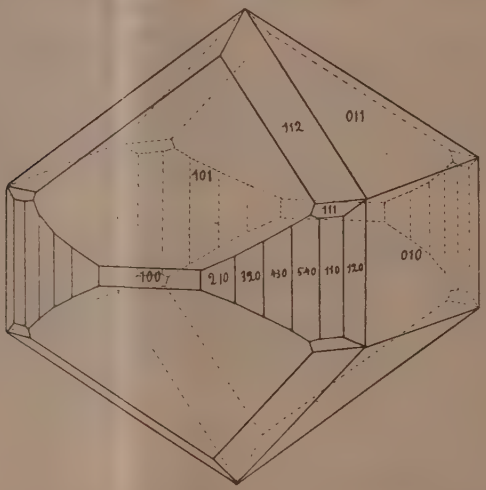


Fig. 1.

Un tale abito sembra rarissimo nella bournonite in genere, infatti nei moltissimi (se pur non in tutti) cristalli fin qui studiati, compare sempre la forma *c*{001} più o meno sviluppata, come risulta anche dai numerosi disegni raccolti nell'*Atlas der Krystallformen von Victor Goldschmidt*, Heidelberg 1913, Bd. I, Tafeln 219-230, fig. 1-174.

Del resto, la stentata formazione di *c*{001} anche negli altri cristalli di Brosso sembra già accennata dall'aspetto fisico delle facce del pinacoide basale, le quali si presentano sempre poco lucenti e poco piane per una leggera ondulatura che ne deforma e talvolta maschera completamente le immagini luminose.

Tutte le altre forme hanno invece facce piane, liscie, speculari, dalle quali si ottengono buone misure. Solo il prisma verticale *m*{110} si presenta per lo più striato parallelamente all'asse [*z*]: e ciò è dovuto, nel maggior numero dei casi, ad una associazione di più cristallini uniti fra loro in combinazione oscillatoria.

Nel quadro seguente sono riportati tutti i valori angolari da me osservati:

Angoli	N.	Valori estremi	Medie	Valori calcolati $a:b:c = 0{,}93797:1:0.89686$ (Miller)	Differenza fra media e calcolo
$a : o = (100)\,(101)$	4	46°17′ - 46°12′	46°14′	46°17′	— 3
$a : x = (100)\,(102)$	2	64 30 - 64 26	64 28	64 27	+ 1
$a : l = (100)\,(320)$	2	31 50 - 31 46	31 48	32 1	— 23
$a : e = (100)\,(210)$	1	—	24 52	25 8	— 16
$a : u = (100)\,(112)$	1	—	66 26	66 26	0
$a : y = (100)\,(111)$	2	54 33 - 54 31	54 32	54 33 1/2	— 1 1/2
$a : m = (100)\,(110)$	4	43 24 - 43 0	43 12	43 10	+ 2
$a : c = (100)\,(001)$	1	—	89 50	90 0	— 10
$a : \vartheta = (100)\,(430)$	2	35 13 - 35 11	35 12	35 8	+ 4
$b : f = (010)\,(120)$	1	—	28 10	28 4	+ 6
$b : m = (010)\,(110)$	1	—	46 55	46 50	+ 5
$b : K = (010)\,(540)$	2	52 40 - 52 20	52 30	53 7	— 37
$b : \vartheta = (010)\,(430)$	1	—	54 54	54 52	+ 2
$b : l = (010)\,(320)$	3	57 53 - 57 45	57 51	57 59	— 8
$b : e = (010)\,(210)$	1	—	64 35	64 52	— 17
$b : n = (010)\,(011)$	3	48 7 - 48 4	48 6	48 6 3/4	— 0 3/4
$c : m = (001)\,(110)$	1	—	89 55	90 0	— 5
$c : y = (001)\,(111)$	1	—	52 53	52 40	— 17
$c : u = (001)\,(112)$	1	—	32 58	33 15	— 17
$m : m = (110)\,(1\bar{1}0)$	6	86 20 - 86 12	86 18	86 20	— 2
$m : l = (110)\,(320)$	2	11 25 - 11 22	11 23 1/2	11 9	+ 14 1/2
$m : e = (110)\,(210)$	1	—	17 45	18 2 1/2	— 17 1/2
$m : y = (110)\,(111)$	3	37 19 - 37 2	37 9	37 20	— 11
$m : u = (110)\,(112)$	3	56 42 - 56 30	56 40	56 45	— 5
$m : g = (110)\,(221)$	1	—	20 56	20 52 1/2	+ 3 1/2
$o : x = (101)\,(102)$	1	—	18 20	18 10	+ 10
$o : \theta = (101)\,(213)$	1	—	17 40	17 58 1/2	— 18 1/2
$o : v = (101)\,(211)$	3	29 25 - 29 3	29 9	28 59	+ 10
$o : n = (101)\,(011)$	2	57 31 - 57 29	57 30	57 27	+ 3
$e : v = (210)\,(211)$	2	25 22 - 25 18	25 20	25 20	0
$e : \theta = (210)\,(213)$	1	—	54 57	54 51	+ 6
$f : \varrho = (120)\,(121)$	2	26 8 - 26 4	26 6	26 12	— 6
$y : u = (111)\,(112)$	1	—	19 25	19 25	0

Dei 63 spigoli misurati, solo alcuni si scostano di parecchi minuti primi dal valore teorico: e ciò è dovuto o alla imperfezione delle facce, o alla loro piccolezza; tutti gli altri concordano abbastanza bene con i valori calcolati dalle costanti di Miller per la bournonite di Cornovaglia. Infatti, 23 medie su 33 non differiscono più di 10′ dai valori teorici: e, di queste, molte differiscono anche assai meno. Nella colonna delle differenze del quadro precedente risulta, ancora, che le medie hanno una leggera tendenza a mantenersi inferiori ai valori ottenuti col calcolo.

Fig. 2.

Salvo i tre cristalli di cui ho riferito più sopra le combinazioni cristalline, e alcune scheggie di cristallo che mi hanno pure servito per la misura di alcuni angoli, tutti gli altri cristalli si presentano multipli per associazione parallela, per geminazione, o per l'una e l'altra assieme. La geminazione avviene sempre secondo una faccia di $m\{110\}$: e con l'unione di altri cristalli paralleli al primo individuo o al secondo, si ha un complesso alquanto rotondeggiante o leggermente cuneiforme (fig. 2). Non ho osservato complessi con la ben nota e caratteristica forma a croce o a stella o a ruota dentata (i *Rädelerz* di Kapnik in Ungheria).

Nella fig. 2 ho disegnato una delle geminazioni di Brosso. Si vedono 3 cristalli, di cui 2 più grandi uniti fra loro parallelamente e geminati col 1° secondo la legge comune. Il complesso dei 3 individui presenta le seguenti forme: $\{001\}$ $\{100\}$ $\{010\}$ $\{101\}$ $\{110\}$ $\{120\}$ $\{112\}$ $\{111\}$ $\{121\}$ $\{320\}$ $\{210\}$ $\{221\}$ $\{111\}$ $\{213\}$ $\{211\}$ $\{102\}$. Anche qui la faccia (001) è ondulata e poco lucente, mentre tutte le altre, all'infuori di (110) e $(\bar{1}12)$ fortemente striate, sono lucidissime e dànno quindi delle buone immagini.

Per decifrare il complesso in questione, misurai i seguenti angoli calcolati sempre in costanti di Miller:

(100) (010) =	mis.	3°45′	calc.	3°40′
(100) $(\bar{1}20)$ =	»	31 50	»	31 44
(100) $(\bar{1}10)$ =	»	50 50	»	50 30
(100) $(\bar{1}00)$ =	»	94 9	»	93 40

(100)	$(\bar{2}\bar{1}0)$	= mis.	119°10′	calc.	118°48′
(100)	$(\bar{3}\bar{2}0)$	= »	125 33	»	125 41
(100)	$(\bar{1}\bar{1}0)$	= »	136 55	»	136 50
(101)	(011)	= »	3 9	»	3 1
(101)	$(\bar{1}12)$	= »	32 10	»	32 12

Dal calcolo, le facce (320) e $(\bar{1}20)$ risultano fra loro parallele: e, infatti, anche alla misura, esse sono tali, dando, assieme, un'immagine unica, nettissima. L'individuo posteriore, cioè il 3°, non è unito in posizione esattamente pa rallela al 2°, poichè le immagini delle sue facce verticali sono alquanto spostate rispetto a quelle date dalle facce verticali del 1° e del 2° e quindi gli assi [*z*] fanno fra loro un piccolo angolo.

Geologia. — *La penisola Valdéz, e le forme costiere della Patagonia settentrionale.* Nota di G. Rovereto, presentata dal Corrispondente A. Issel.

Una esplorazione che ho fatta, per il gentile aiuto del direttore del Museo de Historia Natural di Buenos Aires, il dott. Angel Gallardo, nel mese di dicembre del 1912, della penisola Valdéz, mi ha permesso di riconoscere che tale interessante aggetto delle coste della Patagonia settentrionale è un grande frammento del tavolato patagonico, che gli sprofonpamenti verticali — quelli stessi che in un'altra mia Nota, inserita in questi *Rendiconti*, ho invocato per spiegare l'origine della morfologia dei dintorni di Bahía Blanca e del golfo di San Matias — hanno isolato dal continente; però non del tutto, perchè l'istmo che lo unisce alla terraferma, non è di formazione posteriore, ossia *aggiunto*, come di frequente si osserva nelle penisolette costiere, ma sì bene un residuo dello stesso altipiano, rimasto interchiuso fra i due grandi archi di sprofondamento cui sono dovuti il golfo Nuevo e il golfo di San Josè, i quali si interpongono fra la penisola e il continente.

Questa affermazione si basa, non solo sulla forma singolare di questi golfi o, meglio, baie, che sono semicircolari, a fondo piatto e non eccessivamente profondo, circuiti da una costa a falesie; ma anche sulle condizioni morfologiche e tettoniche dell'interno della Penisola. Quivi, difatti, si osservano due grandi conche chiuse, incavate interamente nel tavolato, che hanno nome di Salina Grande e di Salina Chica, la prima di kmq. 31.51, la seconda di kmq. 22, circuite quasi interamente da versanti a picco o assai ripidi, con un fondo piatto e salino (perchè furono laghi salati ancora in tempi relativamente recenti), situato a 48 m. sotto il livello del mare; per modo che è certo che se si fosse potuta aprire una breccia nell'altipiano

che le circonda, sino a dare ingresso al mare, esse sarebbero diventate baie morfologicamente identiche, salvo le dimensioni, ai golfi ora ricordati.

Ora, che esse siano dovute a movimenti tettonici di sprofondamento, è facile constatarlo, coordinando lo studio delle condizioni morfologiche con quello delle strutturali: lo sprofondamento sino a 48 m. sotto il livello del mare, ha prodotto un dislivello di 118 m. in media, perchè l'altitudine media della Penisola è da calcolarsi in m. 70; però, avendosi alture che attorno alla Salina Grande raggiungono i 130 m., tale dislivello sarebbe localmente di m. 178: il salto che ne risulta non è mai vinto da una sola parete a picco, ma sì da un a picco basale di 60-70 m. di altezza, cui succedono pendìi poco inclinati, oscuramente terrazzati a due livelli: la serie dei terreni costituenti in modo uniforme la Penisola, perchè a strati perfettamente orizzontali, consiste in un banco affiorante, per pochi metri di altezza, alla base delle falesie (a San Josè, a Punta Norte, a Punta Delgada), avente una fauna fossile eguale a quella che gli Ameghino hanno riscontrata nella Patagonia meridionale e che hanno provvisoriamente indicata con il nome di superpatagoniano, riconoscendola una *facies* marina del più noto santacruziano; a questo superpatagoniano, per uniformità di nomenclatura, suggerirò di dare il nome di *aonikense* (da *Aóniken* altro nome dei Tehuelches): sull'aonikense si basa in perfetta concordanza la serie degli strati entrerriani, con i fossili più caratteristici della lontana provincia di Entrerrios, ed ha una potenza di circa 60 m.: con lieve trasgressione, non sempre avvertibile, succede un cappello di strati marini e terrestri alternati, fra cui l'arenaria azzurra fosfatica collegata a marne gessose, e raramente solfifere, con strati di ghiaiuzze, da riferirsi all'araucano.

In complesso si ha, quindi, una serie ainokense-entrerriana-araucana, avente in media 70 m. di spessore, che non potrebbe da sola costituire le pendici attorno alle Saline che raggiungono, in cifra tonda, i 180 m. di altezza; ma essa vi si vede ripetuta a tre livelli differenti, ben riconoscibili per avere ciascuno a cappello la formazione araucana; per cui è indiscutibile, e graficamente risulta chiarissimo, che le depressioni chiuse, ricettanti la Salina Grande e la Salina Chica, sono dovute a sprofondamenti circolari, verticali, coadiuvati da *faglie ausiliarie* che hanno ridotto a gradinata la parte periferica. E se insisto molto su queste osservazioni, si è perchè assai pochi sono i casi di sprofondamenti simili che siansi potuti accertare mediante constatazioni stratigrafiche.

Si può all'incirca stabilire l'età di questi sprofondamenti, considerando che il più recente terreno interessato dalle faglie è l'araucano inferiore, ossia il pliocene inferiore, e, inversamente, che attorno al golfo Nuevo ho riconosciuto un terrazzo del quaternario medio; per cui gli sprofondamenti sarebbero avvenuti, o durante il pliocene medio e superiore, oppure durante il quaternario inferiore.

Di più, se si vuol dare valore ad un fatto negativo, il quaternario inferiore sarebbe da escludersi, poichè mancano nella Penisola le ghiaie fluvio-glaciali del tehuelchense, ossia del più antico quaternario, mentre esistono sulla costa di contro, a Punta Ninfa che interchiude il golfo Nuevo; per cui questo golfo già sarebbe esistito nel quaternario inferiore per potere impedire all'alluvione tehuelchense di raggiungere la Penisola.

Il tehuelchense è stato segnalato solo per errore nella Penisola, perchè ad esso si riferirono le ghiaiette che dovunque prendono parte alla costituzione del suolo, e che sono il prodotto del disfacimento, in posto, della formazione araucana.

Fisica. — *Sull'uso dei reticoli di diffrazione, nella misura della dilatazione termica od elastica dei cristalli.* Nota I di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

La misura della dilatazione termica od elastica dei cristalli, i quali, di solito, hanno piccole dimensioni, richiede metodi e strumenti più precisi di quelli che servono per le verghe o fili. Per la misura della dilatazione termica dei cristalli, il miglior e quasi unico metodo finora seguìto è quello di Fizeau, che potrebbe anche servire per la misura della dilatazione elastica [1].

Il metodo seguente, fondato sulla proprietà dei reticoli di diffrazione, parmi di applicazione piuttosto facile, e parmi anche non meno esatto di quello di Fizeau.

Se sulla faccia piana, riflettente o trasparente, d'un cristallo, si traccia un reticolo di diffrazione, o se ne produce una copia fotografica aderente, e coi soliti modi si produce con esso e si osserva uno spettro d'ordine tanto alto quanto è possibile, compatibilmente colla necessaria luminosità, la posizione delle righe di questo spettro sarà determinata dalla solita relazione:

$$\text{sen } i + \text{sen } e = m\lambda/s\,, \tag{1}$$

essendo i ed e gli angoli d'incidenza e d'emergenza, contati nello stesso verso, dei raggi considerati, λ la loro lunghezza d'onda, m l'ordine dello

[1] Se nel cristallo si tagliano due larghe faccie piane e parallele e, per quanto è possibile, distanti, e nel mezzo perpendicolarmente ad esse, si fa un foro attraversante; se inoltre in questo si colloca un cilindretto di prova, di vetro o quarzo, colle basi quasi parallele e distanti poco meno della distanza delle faccie suddette; collocando il tutto fra due robuste lamine piane e trasparenti orizzontali, fra la base superiore del cilindretto e quella inferiore della lamina adiacente potranno osservarsi le solite frange di interferenza delle lamine sottili, ed esse si sposteranno (e deformeranno) per effetto d'una pressione esercitata sulle lamine, e non sul cilindretto, e potrà dedursene la diminuzione di spessore del cristallo.

spettro, s la larghezza d'un elemento (cioè d'uno spazio oscuro, più l'adiacente spazio brillante) del reticolo.

Se il cristallo si dilata o si contrae per effetto d'una variazione di temperatura o di pressione, si dilaterà o contrarrà nella stessa proporzione s; e per la (1), essendo i ed m costanti, se è costante anche λ, varierà e, l'angolo d'emergenza, ossia la direzione dei raggi producenti una determinata riga dello spettro; se invece è costante e, varierà λ, la lunghezza d'onda dei raggi che cadono sul filo mediano dell'oculare fisso.

Così, riscaldando di 100° un cristallo il cui coefficiente di dilatazione sia 10.10^{-6}, le righe del sodio nello spettro normale di 3° ordine si sposteranno di $3.589.10.10^{-6}\,\mu\mu$, ossia di 0,1767 unità Angström per grado, 17,67 per 100°, quantità facilmente osservabile e misurabile esattamente.

Comprimendo invece nella direzione di s un cristallo il cui coefficiente di allungamento per trazione sia 100.10^{-6} per kgr. e mm², lo spostamento delle suddette righe sarà di 1,77 u. A. per kgr. e mm²; mentre, se la compressione avvenisse in senso perpendicolare alla direzione di s, lo spostamento sarebbe di circa 0,6 u. A. per kgr. e mm², in senso opposto al precedente.

Allorchè si riscalda il reticolo, per effetto dell'ugual riscaldamento dell'aria o gaz che lo circonda, oltre s, vengono a variare, sebbene molto meno, anche le altre variabili, cioè, variano i ed e per effetto della rifrazione dei raggi incidenti e di quella dei raggi emergenti nel passaggio dell'aria ambiente all'aria calda, o viceversa; e varia altresì λ, la lunghezza d'onda dei raggi che producono una determinata riga, per effetto della diminuita densità dell'aria adiacente al reticolo.

Indicando con n l'indice di rifrazione dell'aria, con T la temperatura assoluta, e considerando e come funzione di i, λ, e T, mentre i e λ sono funzioni di n, ed n ed s sono funzioni di T, potrà porsi:

$$(2) \qquad de = \frac{\partial e}{\partial i}\frac{di}{dn}\frac{dn}{d\mathrm{T}}d\mathrm{T} + \frac{de}{dn}\frac{dn}{d\mathrm{T}}d\mathrm{T} + \frac{\partial e}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dn}\frac{dn}{d\mathrm{T}}d\mathrm{T} + \frac{\partial e}{\partial s}\frac{ds}{d\mathrm{T}}d\mathrm{T}$$
$$= d'e + d''e + d'''e + d^{\mathrm{IV}}e.$$

Si può notare che, sebbene le variazioni di n ed s, e quindi quelle di i e di e, siano così piccole che possono esser trattate, senza errore apprezzabile, come infinitesime, ciò tuttavia non è ammissibile per le variazioni di T, che non sono neppure piccole; ma la relativa integrazione non altera essenzialmente la suddetta uguaglianza. Difatti:

La legge della variazione dell'indice di rifrazione dell'aria colla temperatura può esser espressa, almeno approssimativamente, da:

$$(n - 1)\,\mathrm{T} = \mathrm{C} \text{ costante},$$

donde si ricava:

$$dn/d\mathrm{T} = -(n - 1)/\mathrm{T};$$

quindi:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dn}{dT}\, dT = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{n-1}{T}\, dT = +\int_{T_2}^{T_1} C\,\frac{dT}{T^2} = -C\,\frac{T_2 - T_1}{T_1\,T_2}$$

$$= -(n_1 - 1)\,\delta T/T_2 = -(n_2 - 1)\,\delta T/T_1 = \delta T\,\sqrt{(n_1 - 1)(n_2 - 1)/T_1 T_2}\,.$$

Ponendo

$$n_1 = n_m + \varepsilon\,,\quad n_2 = n_m - \varepsilon\quad,\quad T_1 = T_m - t\,,\quad T_2 = T_m + t\,,$$

trascurando ε^2 ed eseguendo l'estrazione approssimata della radice, si ricava

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dn}{dT}\, dT = -(1 + t^2/2T_m^2)\,\frac{n_m - 1}{T_m}\,\delta T\,,$$

essendo δT la differenza delle due temperature, ed n_m e T_m l'indice di rifrazione medio e la temperatura media. Trascurando $t^2/2T_m^2$ si ha, approssimativamente,

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dn}{dT}\, dT = \frac{n_m - 1}{T_m}\,\delta T \text{ ossia } = \frac{dn}{dT}\,\delta T\,.$$

Similmente, ma con maggiore approssimazione, potrà porsi

$$\int_{T^1}^{T_2} \frac{ds}{dT}\, dT = \frac{ds}{dT}\int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{ds}{dT}\,\delta T\,;$$

ossia dn/dT e ds/dT, nel caso attuale e prendendone il valor medio, possono esser considerati come costanti, e l'integrazione si effettua su dT, che diviene perciò una differenza finita.

1. *Spostamento delle righe prodotto dalla variazione, per rifrazione, dell'angolo d'incidenza.*

$$d'e = (\partial e/\partial i)\,(di/dn)\,(dn/dT)\,\delta T\,.$$

Dalla (1) si ricava:

$$\partial e/\partial i = -\cos i/\cos e\,.$$

La legge di rifrazione dà:

$$n \operatorname{sen} i_1 = \text{costante},$$

indicando con i_1 l'angolo che fa il raggio incidente colla normale alla superficie di separazione dell'aria ambiente dall'aria calda; differenziando, poichè gli indici di rifrazione dei due mezzi differiscono di pochissimo si ricava:

$$di_1/dn = -\operatorname{tang} i_1/n\,,$$

che ci dà anche la deviazione di_1 che subisce il raggio. Si ha dunque:

$$d'e = -(\cos i/\cos e)\,(\operatorname{tang} i_1/n)\,(n-1)\,\delta T/T\,.$$

2. *Spostamento delle righe prodotto dal variare, per rifrazione, dell'angolo di emergenza.*

$$d''e = (de/dn)\,(dn/d\mathrm{T})\,\delta\mathrm{T}\,.$$

La legge di rifrazione, indicando con e_1 l'angolo che fa il raggio proveniente dal reticolo colla normale alla superficie di separazione dell'aria calda dall'aria ambiente, dà:

$$n \operatorname{sen} e_1 = \text{costante}\,.$$

Se ne ricava:

$$de_1/dn = -\operatorname{tang} e_1/n\,,$$

quindi, poichè dn qui è negativo,

$$d''e = +\operatorname{tang} e_1 \frac{n-1}{n}\frac{\delta\mathrm{T}}{\mathrm{T}}\,.$$

3. *Spostamento delle righe prodotto dalla variazione della lunghezza d'onda nell'aria.*

$$d'''e = (\partial e/\partial\lambda)\,(d\lambda/dn)\,(dn/d\mathrm{T})\,\delta\mathrm{T}\,.$$

Dalla (1) si ricava:

$$\partial e/\partial\lambda = m/s\cos e$$

Inoltre si ha:

$$n\lambda = \text{costante}\quad,\quad dn/d\lambda = -\lambda/n\,;$$

quindi:

$$d'''e = -\frac{m\lambda}{s\cos e}\frac{n-1}{n}\frac{\delta\mathrm{T}}{\mathrm{T}}\,.$$

4. *Spostamento delle righe prodotto dalla dilatazione del reticolo.*

$$d^{\mathrm{IV}}e = (\partial e/\partial s)\,(ds/d\mathrm{T})\,\delta\mathrm{T}\,.$$

Dalla (1) si ricava:

$$\partial e/\partial s = -m\lambda/s^2\cos e\,;$$

inoltre, dalla legge di dilatazione,

$$\partial s/\partial\mathrm{T} = \mathrm{K}s_0\,;$$

quindi:

$$d^{\mathrm{IV}}e = -m\lambda\mathrm{K}\delta\mathrm{T}/s\cos e\,.$$

5. *Spostamento complessivo delle righe.* — Può essere osservato e misurato con un oculare mosso (esso o il filo oculare) con una vite micrometrica; oppure, più semplicemente, con un oculare a scala fissa nel piano focale.

Se δa è lo spostamento assoluto d'una riga (non deviata dall'oculare), e p' la sua distanza dal reticolo, sarà $de = \delta a/p'$.

È più comodo evitare la misura assoluta di δa e di p', osservando in quali divisioni a_1 e a_2 dell'oculare cadono due righe comprese nel campo oculare e di lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 note; si avrà così:

$$d\lambda/da = (\lambda_1 - \lambda_2)/(a_1 - a_2);$$

e siccome $de/\delta a = (de/d\lambda)\,(d\lambda/\delta a)$, sarà:

$$de = (m/s\cos e)\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,\delta a/(a_1 - a_2).$$

Si avrà dunque, per la (2),

$$\frac{m}{s\cos e}\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_1 - a_2}\frac{\delta a}{\partial T} = \frac{n-1}{T}\left(\frac{\cos i}{\cos e}\frac{\operatorname{tang} i_1}{n} - \frac{\operatorname{tang} e_1}{n} - \frac{m\lambda}{ns\cos e}\right) - \frac{m\lambda}{s\cos e}K,$$

e considerando n isolato come uguale ad 1, si ricava:

$$K = \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{a_1 - a_2}\frac{\delta a}{\delta T} + \frac{n-1}{T}\left(\frac{s\cos i}{m\lambda}\operatorname{tang} i_1 - \frac{s\cos e}{m\lambda}\operatorname{tang} e_1 - 1\right).$$

In molti casi la correzione complessiva suddetta è identicamente nulla come si vedrà nella Nota seguente.

Patologia vegetale. — *Ancora sul significato patologico dei cordoni endocellulari nei tessuti della vite.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Le divisioni dei nuclei in Haplosporidium limnodrili* (1). Nota di Leopoldo Granata, presentata dal Socio B. Grassi.

In una Nota precedente (2) ho esposto i primi risultati delle mie ricerche sullo sviluppo degli Aplosporidi; credo ora opportuno di ritornare brevemente sull'argomento per accennare ai punti più caratteristici del processo cariocinetico, che costituisce l'unico modo di divisione dei nuclei nella forma da me studiata.

Dovrò necessariamente limitarmi, per ora, ad una descrizione sommaria ed oggettiva dei fatti, riservandone per un prossimo lavoro d'insieme la trattazione completa. Le mie figg. 1-11 dànno una rappresentazione semischematica dello svolgimento del fenomeno.

(1) Lavoro eseguito in Firenze nel Laboratorio di Zoologia degli invertebrati. 1913.
(2) Rend. R. Accad. dei Lincei (5), vol. XXII, fasc. 12°, 2° sem. 1913.

Il nucleo, allo stato di riposo (fig. 1), ha forma regolarmente ovale ed è limitato da una membrana ben visibile che persiste durante l'intero processo di divisione. L'area nucleare è completamente occupata da un reticolo di sottili filamenti acromatici, sui quali è sparsa, a granuli od a catenelle di granuli, la cromatina.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

In seno al reticolo, generalmente in una posizione laterale determinata, si trova un grosso corpo che assume fortemente i colori basici. La sua colorazione non è però uniforme: presenta talvolta uno spesso strato esterno avvolgente uno spazio che assume più debolmente i coloranti; tal'altra presenta una struttura spugnosa a grosse maglie avvolgenti spazî più chiari.

È questa una costituzione comune dei nuclei dei protisti con cariosoma e cromatina periferica. Ma vi è altro che contribuisce a dare ai nuclei di

Haplosporidium un aspetto del tutto caratteristico: La cavità nucleare è attraversata, nel senso della lunghezza, da una sorta di asse cilindrico, costituito di una sostanza apparentemente omogenea, che assume elettivamente i colori acidi; ed è circondato da uno strato che si colora intensamente in nero con l'ematossilina ferrica. Questo strato non si estende per tutta la lunghezza dell'asse, ma si arresta a breve distanza dalle due estremità.

In sezione trasversale noi vediamo il reticolo diffuso, in seno al quale sono limitate due zone: l'una periferica, nella quale è il cariosoma; l'altra mediana, nella quale è la sezione dell'asse centrale (fig. 2).

Lo strato periferico cromatico di quest'ultimo è messo in evidenza nettamente con la sola ematossilina ferrica, almeno per quanto a me risulta; così che, osservando i nuclei a fresco, o pure in preparati non colorati con l'*Heidenhain*, la parte centrale appare solo come una zona chiara, e si hanno allora immagini perfettamente identiche a quelle rappresentate nella fig. 49 *b* (pl. XII) di Caullery e Mesnil (1) per *Haplosporidium Vejdovskii*.

L'inizio della profase è segnato semplicemente da un addensamento del reticolo intorno all'asse centrale (fig. 3) il quale si allarga poi sino ad acquistare forma di fuso troncato alle due estremità. All'equatore di questo si addensa quindi la cromatina, a costituire una sorta di piastra equatoriale nella quale, piuttosto che veri cromosomi, si trovano granuli o piccoli ammassi e catenelle di granuli, che sembrano ancora sostenuti dalle maglie del reticolo (fig. 4). Il cariosoma rimane addossato, ma esterno alla cromatina, e conserva forma irregolarmente rotonda.

All'inizio dell'anafase, il fuso si allarga sino ad assumere la forma di una specie di bariletto, terminato ai due poli da corpi chiari, omogenei, di forma ovale. La cromatina si diffonde su tutta la superficie del fuso, in catenelle longitudinali, lungo le fibre (fig. 4), e si divide poi in due zone (fig. 6) che vanno a mano a mano addensandosi ai due poli rispettivi, dove ben presto appare chiaramente ricostituito il reticolo (figg. 7-8).

Il cariosoma conserva, fino nell'anafase avanzata, forma rotondeggiante; quindi rapidamente si allunga e si suddivide fra i due nuclei figli (figg. 7-8-9).

La ricostituzione del nucleo si compie con un lento processo le cui tappe principali sono rappresentate dalle figg. 9-10-11.

Anzitutto, il reticolo cromatico viene a formare una sorta di calotta attorno al corpo acromatico polare (fig. 9); quindi questo si allunga (figg. 10 e 11) a costituire un asse longitudinale che attraversa il nucleo nella sua lunghezza e attorno al quale la cromatina forma una sorta di fuso allungato. Indi incomincia l'accrescimento; ed il reticolo viene ad occupare tutta l'area nucleare, mentre il cariosoma guadagna la sua posizione laterale.

(1) *Arch. de zool. expérim. et génér.*, (IV), tom. IV, 1905.

La fig. 11 rappresenta il più comune aspetto dei nuclei, ed è in tale stadio che si compie la cariogamia: le due masse cromatiche si accollano l'una all'altra lateralmente, e si fondono in un'unica massa ovale, con cromatina sparsa su un reticolo a maglie minute e regolari, e due cariosomi situati alle due estremità.

Noi abbiamo già notato l'analogia evidente tra la costituzione dei nuclei di *H. limnodrili* con quelli di *H. Vejdovskii*.

Il confronto tra le immagini fornite dai miei preparati e le figure di Caullery e Mesnil (1) mi permette di credere che anche il comportamento durante la divisione sia uguale nelle due forme.

La fig. 48 *d* (Pl. XII) dei suddetti autori mostra due nuclei in anafase il cui aspetto può ricondursi facilmente a quello delle mie figure 5 e 6.

Le figure 48 *a b c*, 50 *a b*, e 51, mostrano dei nuclei nei quali « la sostanza cromatica si accumula lungo i due meridiani, su uno dei quali si dispone il nucleolo » (C. e M., pag. 119).

Non ostante la differenza apparente credo di potere asserire che questi stadii corrispondono esattamente a quello della mia figura 11. Nelle preparazioni imperfettamente fissate la cromatina tende appunto a raggrupparsi in due bande longitudinali separate da uno spazio chiaro nel quale l'asse centrale è assai difficilmente visibile.

I dati sulle altre specie di *Haplosporidium* sono troppo limitati per permettere confronti. Notiamo tuttavia in tutti i casi la presenza di una membrana nucleare ben distinta che persiste durante la divisione, la persistenza del cariosoma e la mancanza di centrioli ai poli e di cromosomi distinti nelle piastre equatoriali.

(1) Loc. cit.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Perotti R. *Studi di biologia sopra l'Agro romano, in rapporto al suo bonificamento agrario.* Pres. dal Socio Cuboni.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Volterra fa omaggio di un volume del prof. Le Bon, contenente la biografia e la bibliografia analitica di Albin Haller, e ne discorre.

E. M.